



УНИВЕРЗИТЕТ „КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ
ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ
ИНСТИТУТ ЗА АВТОМАТИКА И СИСТЕМСКО ИНЖИНИЕРСТВО



м-р Бобан Темелковски

**УПРАВУВАЊЕ, СИНХРОНИЗАЦИЈА И ИНТЕГРАТИВНА
СТАБИЛИЗАЦИЈА НА МРЕЖНО ПОВРЗАНИ КОМПЛЕКСНИ
ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ**

Докторски труд

Скопје, 2026

Кандидат:

Бобан Темелковски, магистер по електротехника и информациски технологии

Ментор:

акад. проф. д-р Георги Димировски,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за автоматика и системско инженерство

Комисија за одбрана:

проф. д-р Миле Станковски – претседател
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за автоматика и системско инженерство

акад. проф. д-р Георги Димировски – ментор
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за автоматика и системско инженерство

проф. д-р Весна Ојлеска Латкоска – член
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за автоматика и системско инженерство

Academician Prof. Dr. Janusz Kacprzyk, Ph.D., D.Sc., Dr.h.c.mult. – member
Polish Academy of Sciences
Institute of Systems Research
Warsaw School of Information Technology
Ul. Newelska 6, 01-447 Warsaw
Poland

Academician Prof. Dr. Vasil Sgurev, Ph.D., D.Sc., Dr.h.c. – member
Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Information and Communication Technology
Acad. Georgi Doncev Str., Blok 2, 1113 Sofia
Bulgaria

Научна област:

Електротехника и информациски технологии

Датум на одбрана:

24.09.2026 година

БЛАГОДАРНОСТ

Изработката на оваа докторска дисертација претставува резултат на повеќегодишна научна работа, поддржана од многу луѓе и институции на кои искрено им ја изразувам мојата благодарност.

Особена благодарност упатувам до мојот ментор, акад. проф. д-р Георги Димировски, за неговото стручно водство, научна визија, доверба и континуирана поддршка во текот на целиот истражувачки процес. Неговата посветеност, критички пристап и академска мудрост претставуваа клучен фактор во обликувањето на научниот правец на оваа дисертација.

Посебна благодарност изразувам и до проф. д-р Миле Станковски, чија поддршка, совети и научна инспирација значително придонесоа кон продлабочување на истражувачките идеи и кон унапредување на квалитетот на дисертацијата.

Голема благодарност упатувам до Институтот за автоматско управување и системско инженерство (АСИ) при Факултетот за електротехника и информациски технологии, за обезбедените услови за научноистражувачка работа, академската средина и поддршката во текот на докторските студии.

Искрена благодарност му изразувам и на проф. д-р Југослав Ачкоски, мој долгогодишен раководител на Воената академија Генерал Михаило Апостолски и во моите претходно научноистражувачки проекти, за неговата поддршка, разбирање и охрабрување во текот на мојот академски и професионален развој.

Најдлабока благодарност им должам на моето семејство – на моите родители, за нивната безусловна љубов, жртва и поддршка низ целиот мој животен и образовен пат, како и на мојата сопруга Бојана, за нејзината трпеливост, разбирање, доверба и постојана морална поддршка, без која оваа дисертација не би била возможна.

Изјавувам дека докторскиот труд е оригинален труд што го имам изработено самостојно.

Потпис на авторот, с.р

Изјавувам дека електронската верзија на докторскиот труд е идентична со отпечатениот докторски труд.

Потпис на авторот, с.р

Содржина

Листа на слики	8
Апстракт	9
Abstract	10
1 Вовед.....	11
1.1 Преглед на досегашните истражувања во оваа област	11
1.2 Меѓуповрзани и мрежни динамички системи	12
1.3 Синхронизација и колективна динамика	14
1.4 Улогата на динамичките графови	15
1.5 Цели и научен придонес на истражувањето	16
1.6 Структура на дисертацијата	18
1.7 Литература	19
2 Преглед на генерализирани динамички системи	20
2.1 Класични состојбени модели на динамички системи	20
2.2 Структура на динамички системи и претставување со графови	26
2.3 Стабилност и поврзувачка стабилност на меѓуповрзани системи	30
2.4 Мрежна формулација и лапласијанска структура	36
2.5 Стабилност и робусност кај мрежните динамички системи	42
2.6 Ограничувања на класичните модели	45
2.7 Спектрална структура и колективни режими	47
2.8 Предуслови за синхронизабилност	50
2.9 Структурни предуслови и синхронизабилна организација на мрежните динамички системи	53
2.10 Синтетичка рамка и интегративна формулација на мрежните динамички системи	55
2.11 Литература	57
3 Мрежни структури од повисок ред и нивна динамика	58
3.1 Математички модел на мултимрежни динамички системи	60
3.2 Моделирање на структурни варијации и дефекти во мултимрежни динамички системи	61
3.3 Системска интерпретација на мултимрежните динамички структури	63
3.4 Заклучни согледувања	64
3.5 Литература	65
4 Синхронизабилност кај мрежни меѓуповрзани сложени динамички системи	67
4.1 Премин од мрежна динамика кон синхронизабилност	68
4.2 Основен модел на синхронизација кај сложени мрежи	69

4.3 Спектрални предуслови за синхронизабилност	70
4.4 Далекусежни ефекти на синхронизабилност кај мултимрежни динамички системи	70
4.5 Системска интерпретација на далекусежните ефекти на синхронизабилност	73
4.6 Улога на тополошката структура и робусност на синхронизацијата	74
4.7 Заклучни согледувања за синхронизабилност кај мрежно меѓуповрзани сложени динамички системи	76
4.8 Литература	77
5 Декадното откритие на Шилјак како унифицирана рамка на динамички графови за анализа на сложени системи	79
5.1 Концепт на динамички граф како модел на сложени системи	80
5.2 Стабилност на динамички графови	81
5.3 Позитивни динамички графови и инваријантна структура на сложени системи	82
5.4 Динамички граф како модел на сложени динамички системи	83
5.5 Динамички графови во мултиагент системи и колективна координација	84
5.6 Динамичките графови како системска парадигма на современата теорија на сложени системи	85
5.7 Системска интерпретација на динамичките графови	87
5.8 Литература	88
6 Структурно-променливо управување кај сложени меѓусебно поврзани динамички системи	90
6.1 Структурно-променливо управување кај меѓуповрзани сложени динамички системи	90
6.2 Математички модел на меѓусебно поврзани дескрипторски системи	91
6.3 Претпоставки и формулација на проблем на стабилизација	92
6.4 Главен теориски резултат за структурно-променлива стабилизација	93
6.5 Нумеричка верификација на теориските резултати	95
6.6 Научен придонес и заклучни согледувања	98
6.7 Литература	99
7 Интегративно-надзорен принцип кај сложени меѓусебно поврзани динамички системи	101
7.2 Математички модел на интегративно-надзорното управување	101
7.3 Координаторски механизам и структурно-променливо управување	103
7.4 Услови за асимптотска синхронизација	104
7.5 Адаптивна стратегија на интегративно-надзорното управување	106
7.6 Нумеричка верификација на интегративно-надзорниот модел	107
7.7 Научен придонес и системска интерпретација на интегративно-надзорниот принцип	110
7.8 Литература	111
8 Системски согледувања и научна синтеза на резултатите	113
8.1 Главни научни придонеси на дисертацијата	115

8.2 Системска интеграција и научна синтеза на резултатите.....	116
8.3 Научна валидација и позиционирање на резултатите	117
8.4 Синтеза на научните резултати и системска кохерентност на дисертацијата	118
8.5 Насоки за понатамошни истражувања и отворени научни прашања	119
8.6 Заклучок на дисертацијата.....	120

Листа на слики

Слика бр.2.1: Концептуален приказ на динамички систем со константно надворешно влијание.....	21
Слика бр. 2.2: Претставување на динамички систем со граф, каде состојбените променливи x_i се претставени како јазли, а ненултите елементи а a_{ij} како насочени врски.....	27
Слика бр. 2.3: Илустрација на асимптотска стабилност преку конвергенција на состојбените траектории кон рамнотежната точка.	31
Слика бр. 2.4 Претставување со граф на мрежен динамички систем со тежински врски a_{ij} , која ја илустрира дифузионата поврзаност помеѓу јазлите.	37
Слика бр. 2.5: Илустрација на робусна стабилност во присуство на надворешни нарушувања $d(t)$, при што сите состојбени траектории, и покрај континуираните нарушувања долж нивната еволуција, конвергираат кон рамнотежната точка.	42
Слика бр. 2.6: Илустрација на модална декомпозиција на динамички систем, при што различните спектрални компоненти се карактеризираат со различни брзини на конвергенција	48
Слика бр. 2.7: Спектар на лапласијанската матрица, при што односот $\rho = \lambda_n/\lambda_2$ ја определува синхронизабилноста на мрежата.	49
Слика бр. 2.8: Влијание на топологијата врз синхронизабилноста: (лево) слабо поврзана мрежа со ограничена способност за синхронизација и (десно) густо поврзана мрежа со подобрена синхронизабилност.	54
Слика бр. 3.1: Структурна организација на мултимрежен динамички систем со повеќеслојни врски помеѓу автономни динамички потсистеми [15].	59
Слика бр. 4.1: Споредбена динамика на реалните вредности и предвидувањата добиени од поединечните модели и нивната синхронизирана комбинација [17].	72
Слика бр. 6.1: Сигнали на грешка $e_1(t)$ и $e_2(t)$ во затворена повратна врска, што ја потврдува асимптотската конвергенција кон нула	97
Слика бр. 6.2: Резултати од симулацијата: Еволуција на системот кон воспоставување на стационарни состојби на нелинеарните управувачки закони во услови на просторно-зависно префрлување.....	97
Слика бр. 6.3: Пример на период на состојбено-зависниот префрлувачки сигнал.	98
Слика бр. 7.1: Динамички системи на мрежни јазли: хаотични кола Чуа и просторен портрет на фазна состојба на неговата динамика	109
Слика бр. 7.2: Временска еволуција на компонентите на синхронизациската грешка $e_1(t)$ и $e_2(t)$ кај мрежа од Чуа хаотични осцилатори.....	109
Слика бр.7.3: Временска еволуција на третата компонента на синхронизациската грешка $e_3(t)$ кај мрежа од Чуа хаотични осцилатори.	110

УПРАВУВАЊЕ, СИНХРОНИЗАЦИЈА И ИНТЕГРАТИВНА СТАБИЛИЗАЦИЈА НА МРЕЖНО ПОВРЗАНИ КОМПЛЕКСНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Апстракт

Оваа докторска дисертација се занимава со анализа, моделирање и управување на сложени меѓуповрзани динамички системи, со посебен фокус на синхронизацијата како централен феномен на нивното колективно однесување. Современите технички, енергетски и социоекономски системи сè почесто се моделираат како големоразмерни структури составени од меѓусебно поврзани потсистеми, при што нивната глобална динамика произлегува од сложените интеракции и не може да се објасни исклучиво преку анализа на поединечните компоненти.

Во дисертацијата се воспоставува интегрирана теоретска рамка која ги обединува класичните состојбени модели, генерализираните (дескрипторски) системи и мрежните репрезентации базирани на графови и лапласијанска структура. Во овој контекст, синхронизацијата се интерпретира како стабилност на инваријантна разновидност (англ. manifold) во просторот на состојби, при што нејзините услови се поврзуваат со спектралните својства на мрежата, особено со лапласијанската матрица и нејзините сопствени вредности.

Понатаму, се разгледува динамиката на мрежи со променлива структура преку концептот на динамички графови, со што се овозможува истовремена анализа на еволуцијата на состојбите и топологијата. Анализата покажува дека временските промени во структурата директно влијаат врз условите за синхронизабилност и стабилност, при што се идентификуваат клучни механизми што го определуваат колективното однесување на системот.

Посебен научен придонес претставува развојот на децентрализирани управувачки закони за генерализирани меѓуповрзани системи со структурна сличност. Предложените методи овозможуваат асимптотско следење на референтни сигнали, елиминација на импулсни режими и обезбедување робусност во присуство на неизвесности и нелинеарности. Аналитичкиот пристап се базира на векторски Љапуновови функции и принципи на диференцијални нееднакости, со што се гарантира стабилност на целокупниот систем.

Во завршниот дел се воведува интегративно-надзорен принцип на управување, кој претставува надградба на децентрализираните стратегии преку координација на локалните контролери на глобално ниво. Овој пристап овозможува систематско постигнување и одржување на синхронизација кај сложени умрежени системи, дури и во услови на структурна променливост и динамичка неизвесност.

Дополнително, предложената рамка се валидира преку анализа и интерпретација на карактеристични сценарија, со што се потврдува нејзината применливост и ефикасност кај реални системи. Со тоа се демонстрира дека синхронизацијата претставува клучен интегративен принцип кој ги обединува структурните, динамичките и управувачките аспекти на сложените системи.

Научниот придонес на дисертацијата се состои во формализација и проширување на условите за синхронизабилност кај умрежени динамички системи, развој на методи за управување кај генерализирани и структурно-променливи системи, како и воспоставување на интегративно-надзорна рамка за глобална координација. Предложените резултати придонесуваат кон унапредување на теоријата на големоразмерни системи и имаат потенцијал за примена во енергетски мрежи, комуникациски системи и интелигентни управувачки архитектури.

Клучни зборови:

Сложени динамички системи, меѓуповрзани системи, синхронизација, синхронизабилност, динамички графови, спектрална анализа, децентрализирано управување, дескрипторски системи и структурна променливост.

CONTROL, SYNCHRONIZATION, AND INTEGRATIVE STABILIZATION OF NETWORKED COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS

Abstract

This doctoral dissertation addresses the analysis, modelling, and control of complex interconnected dynamic systems, with a particular focus on synchronization as a central phenomenon of their collective behaviour. Modern technical, energy, and socio-economic systems are increasingly modelled as large-scale structures composed of interconnected subsystems, where the global dynamics emerge from complex interactions and cannot be explained solely through the analysis of individual components.

The dissertation establishes an integrated theoretical framework that unifies classical state-space models, generalized (descriptor) systems, and network representations based on graph theory and Laplacian structure. In this context, synchronization is interpreted as the stability of an invariant manifold in the state space, where its conditions are related to the spectral properties of the network, particularly the Laplacian matrix and its eigenvalues.

Furthermore, the dynamics of networks with variable structure are examined through the concept of dynamic graphs, enabling simultaneous analysis of the evolution of both system states and topology. The analysis shows that temporal variations in the structure directly affect the conditions for synchronizability and stability, while identifying key mechanisms that determine the collective behaviour of the system.

A particular scientific contribution is the development of decentralized control laws for generalized interconnected systems with structural similarity. The proposed methods enable asymptotic tracking of reference signals, elimination of impulsive modes, and robustness in the presence of uncertainties and nonlinearities. The analytical approach is based on vector Lyapunov functions and principles of differential inequalities, ensuring the stability of the overall system.

In the final part, an integrative–supervisory control principle is introduced, representing an extension of decentralized strategies through coordination of local controllers at the global level. This approach enables systematic achievement and maintenance of synchronization in complex networked systems, even under conditions of structural variability and dynamic uncertainty.

Additionally, the proposed framework is validated through the analysis and interpretation of representative scenarios, confirming its applicability and effectiveness in real-world systems. This demonstrates that synchronization represents a key integrative principle that unifies the structural, dynamical, and control aspects of complex systems.

The scientific contribution of the dissertation lies in the formalization and extension of conditions for synchronizability in networked dynamic systems, the development of control methods for generalized and structurally variable systems, and the establishment of an integrative–supervisory framework for global coordination. The proposed results contribute to the advancement of large-scale systems theory and have potential applications in energy networks, communication systems, and intelligent control architectures.

Keywords

Complex dynamic systems, interconnected systems, synchronization, synchronizability, dynamic graphs, spectral analysis, decentralized control, descriptor systems, structural variability.

ГЛАВА 1

Вовед

Техничките, економските и природните процеси сè почесто се моделираат како сложени динамички системи составени од голем број меѓусебно поврзани потсистеми. Овие системи, познати како големоразмерни динамички системи, се карактеризираат со висока димензионалност, изразена структурна сложеност и присуство на нелинеарни и временски променливи интеракции.

Во теоријата на динамичките системи анализата претежно се заснова на централизираните математички модели со релативно ограничен број состојбени променливи. Меѓутоа, современите инженерски, технолошки и природни системи, како што се: електроенергетските мрежи, комуникациските инфраструктури и биолошките системи, се одликуваат со висока степен на меѓусебна поврзаност и структурна хетерогеност, што ги прави класичните пристапи недоволни за нивна адекватна анализа и управување.

Поради тоа, се јавува потреба од развој на нови аналитички и синтетички методи кои ги интегрираат структурните и динамичките својства на системите, со цел обезбедување на стабилност, робусност и ефикасно управување на големоразмерните системи како целина.

1.1 Преглед на досегашните истражувања во оваа област

Сложеноста на големоразмерните динамички системи произлегува од повеќе меѓусебно поврзани фактори. Големiot број на потсистеми доведува до висока димензионалност и појава на комплексни колективни динамички режими, додека нивните меѓусебни врски често се нелинеарни, временски променливи и структурно-зависни. Дополнително, овие системи се изложени на надворешни нарушувања, структурни промени и параметарски неизвесности, што значително ја усложнува анализата и синтезата на управувачки стратегии [1], [7].

Раните истражувања во областа на големоразмерните системи биле насочени кон развој на методи за декомпозиција, децентрализирано управување и анализа на стабилноста на составени системи. Во оваа насока, Šiljak поставува значајни теоретски основи преку структурен пристап кон стабилноста и управувањето, при што комплексниот систем се разгледува како множество од меѓусебно поврзани потсистеми [7]. Подоцнежните истражувања ја прошируваат оваа рамка кон распределени и кооперативни архитектури на управување, особено кај системи со просторна распределеност и повеќе автономни единици [3].

Со развојот на теоријата на сложени мрежи, вниманието се насочува кон улогата на топологијата врз динамичкото однесување на системите. Истражувањата на Albert и Barabási покажуваат дека многу реални системи поседуваат скалабилна и хетерогена мрежна структура, што има директно влијание врз нивната робусност, ранливост и колективна динамика [1]. Во таа насока, спектралните својства на графовите стануваат значаен аналитички инструмент за испитување на поврзаноста, стабилноста и преносот на информации во мрежните системи [4], [8].

Особено значајна истражувачка област претставува синхронизацијата на меѓусебно поврзани динамички единици. Pecora и Carroll го воведуваат концептот на функција на главна стабилност како општ метод за анализа на стабилноста на синхронизирани режими кај поврзани нелинеарни системи [6]. Подоцна, Agha и соработниците даваат сеопфатен преглед на синхронизацијата кај сложени мрежи, при што покажуваат дека можноста за синхронизација е директно условена од интеракцијата помеѓу локалната динамика на јазлите и глобалната тополошка структура на мрежата [2].

Во современите истражувања, значајно внимание се посветува и на повеќеагентните системи, каде што координацијата, усогласувањето и колективното однесување се разгледуваат како посебни форми на синхронизација. Графовско-теориските методи во оваа област овозможуваат анализа на комуникациските врски, проектирање на распределени алгоритми и формулирање на услови за стабилно кооперативно однесување [5].

Особено значајна карактеристика на сложените системи е доверливоста, која се дефинира како способност за стабилно функционирање во присуство на нарушувања, дефекти и варијации на параметрите. Во овој контекст, стабилноста не се разгледува само како локална особина на поединечни потсистеми, туку како глобално својство кое произлегува од структурната организација и динамичката интеракција на целокупниот систем [7].

Истражувањето на сложените динамички системи има широка интердисциплинарна примена. Во електроенергетските системи стабилното функционирање зависи од синхронизацијата на голем број генератори и потрошувачи, додека во комуникациските, транспортните и биолошките системи е неопходно координирано однесување на повеќе меѓусебно поврзани компоненти [1], [2], [5].

И покрај значајниот напредок, остануваат отворени прашања поврзани со синхронизацијата и управувањето кај системи со временски променлива структура, нелинеарни интеракции, параметарска неизвесност и висока димензионалност. Поради тоа, развојот на нови теоретски и методолошки основи за анализа, синхронизација и управување на сложени умрежени динамички системи претставува значајно и актуелно истражувачко прашање, кое ја претставува основната мотивација на оваа дисертација.

1.2 Меѓуповрзани и мрежни динамички системи

Големоразмерните динамички системи што се јавуваат во современата техничка, природна и социотехничка практика вообичаено се состојат од повеќе меѓусебно поврзани

динамички потсистеми кои интерагираат преку различни форми на структурни и функционални врски. Овие врски можат да се манифестираат како размена на енергија, материја, информации или управувачки сигнали, при што нивната природа, интензитет и тополошка распределба суштински го определуваат начинот на кој локалните динамички процеси се рефлектираат врз глобалното однесување на системот. Ваквата структурна зависност создава сложени конфигурации кои не можат адекватно да се опишат со класични модели засновани врз претпоставки за централизирана организација и ограничен број интеракции [5].

Во меѓуповрзаните динамички системи секој потсистем функционира како интегрален дел од поширока мрежна структура, при што неговото динамичко однесување е определено не само од сопствените параметри, состојби и влезни влијанија, туку и од ефектите што произлегуваат од поврзаност со останатите компоненти. Оваа структурна условеност доведува до појава на сложени колективни динамички феномени, кои се резултат на синергетското дејство на голем број меѓусебно зависни процеси. Оттука, анализата на ваквите системи бара интегрален системски пристап што ги поврзува локалните динамички својства со глобалната архитектура на поврзаност.

Мрежниот пристап претставува концептуално проширување на класичната системска теорија, при што структурните и динамичките аспекти се разгледуваат во единствена аналитичка рамка. Наместо третирање на системот како збир од независни или слабо поврзани компоненти, се воведува перспектива во која врските меѓу потсистемите се основен носител на динамичкото однесување. Овој пристап е особено релевантен кај системи со висок степен на структурна сложеност, каде што бројот на компоненти и разновидноста на нивните врски ја надминуваат применливоста на традиционалните централизирани методи на моделирање и управување [4], [8].

Во овој контекст, проучувањето на меѓуповрзаните и мрежните динамички системи претставува суштинска основа за развој на современи теории за стабилност, координација и управување во сложени структурни конфигурации. Разбирањето на механизмите преку кои структурната организација влијае врз динамичкото однесување претставува клучен предуслов за анализа на колективните феномени што се јавуваат во ваквите системи, како и за развој на нови методи за нивна контрола, синтеза и оптимизација.

Во рамките на овие системи, централно прашање претставуваат стабилноста и управувањето, кои директно зависат од структурната организација и интеракциските механизми меѓу потсистемите.

Една од централните истражувачки теми во анализата на сложените меѓуповрзани динамички системи е проблемот на стабилноста и управувањето. Со зголемување на димензионалноста на системите и со усложнување на нивната структурна организација, класичните методи на централизирана анализа и синтеза стануваат сè помалку применливи. Ова произлегува од фактот што централизираниот пристап подразбира обработка на целокупната информација за системот на едно место, што кај големоразмерните системи често е технички тешко изводливо или економски неоправдано.

Стабилноста на сложените динамички системи не може да се разгледува исклучиво како локално својство на поединечен потсистем. Таа претставува глобална карактеристика која произлегува од меѓусебната поврзаност меѓу сите компоненти во системот. Дури и во

ситуации кога секој потсистем поединечно ги задоволува условите за стабилност, нивната меѓусебна поврзаност може да доведе до појава на нестабилни динамички режими. Овој феномен ја нагласува важноста на систематската анализа на поврзувачката стабилност, која ја опфаќа улогата на структурните врски и нивното влијание врз глобалното динамичко однесување.

Во контекст на управувањето, ограничувањата на централизираниот пристап доведуваат до развој на децентрализирани и распределени стратегии на управување. Во децентрализираните управувачки структури, секој потсистем е опремен со локален управувач кој располага со ограничен сет на информации, најчесто достапни од неговото непосредно структурно опкружување. И покрај ваквата локална природа на управувањето, основната цел останува постигнување стабилно и координирано глобално однесување на целиот систем [3], [7].

Клучна улога во оваа насока има концептот на структурна декомпозиција, кој овозможува сложениот систем да се разгледува како состав од помали и аналитички попристапни потсистеми. Овој пристап ја олеснува формалната анализа на стабилноста и создава основа за синтеза на управувачки закони што се приспособени на структурните карактеристики на системот. Преку ваквата декомпозиција се воспоставува рамнотежа помеѓу локалната динамичка анализа и глобалната системска координација [7].

Дополнително, децентрализираната контрола претставува суштински чекор кон развој на робусни управувачки стратегии способни да функционираат во присуство на структурни нарушувања, параметарски неизвесности и временски променливи услови. Овие аспекти се од особено значење кај современите технички системи, каде што сигурноста, адаптивноста и функционалната стабилност претставуваат клучни фактори за нивната долгорочна и безбедна експлоатација.

Во оваа смисла, проучувањето на стабилноста и управувањето кај меѓуповрзаните и мрежните динамички системи претставува концептуална основа за понатамошна анализа на колективните динамички феномени.

1.3. Синхронизација и колективна динамика

Еден од клучните аспекти во анализата на сложените мрежни динамички системи е појавата на колективни динамички режими кои произлегуваат од меѓусебна поврзаност на голем број меѓусебно поврзани компоненти. Во рамките на овие феномени, синхронизацијата се издвојува како репрезентативен пример за процес на динамичка координација, при кој одделните потсистеми развиваат усогласено временско и просторно однесување, како резултат на нивната структурна и динамичка поврзаност [2], [6].

Кај големоразмерните системи синхронизацијата не може да се разгледува како изолиран феномен поврзан исклучиво со локалните својства на поединечните динамички единици. Таа претставува глобален процес чија појава и стабилност се условени од архитектурата на интеракциите и од механизмите на пренос на влијанија низ мрежната структура. Оваа зависност ја нагласува потребата од системски пристап кој ги интегрира структурните и динамичките аспекти на анализата во единствена теоретска рамка.

Од аспект на практичната примена, синхронизацијата често претставува посакуван режим на функционирање кој овозможува координирано и стабилно работење на системите со распределена организација. Во електроенергетските системи, комуникациските инфраструктури, транспортните мрежи и биолошките системи, постигнувањето и одржувањето на синхронизирани динамички режими е тесно поврзано со нивната функционална сигурност, ефикасност и отпорност на нарушувања. Поради тоа, современите истражувања се насочени кон развој на аналитички методи за утврдување на условите под кои се јавува синхронизацијата, како и кон синтеза на управувачки стратегии кои овозможуваат нејзино контролирано постигнување и одржување.

Разгледувањето на синхронизацијата во контекст на сложени мрежни системи води кон поопшта научна перспектива во која колективното динамичко однесување се интерпретира како директна последица на структурната организација на системот. Ваквата перспектива отвора нови истражувачки насоки поврзани со влијанието на мрежната топологија врз динамиката, со улогата на спектралните својства на структурните матрици и со значењето на структурните промени во формирањето и стабилизацијата на координирани динамички режими.

Во оваа смисла, синхронизацијата се јавува како фундаментален концепт кој ги поврзува структурната анализа, динамичката стабилност и управувачката синтеза во единствен системски контекст. Нејзиното теоретско и методолошко разгледување претставува основа за развој на современи пристапи во анализата и управувањето на сложени мрежни динамички системи, што ја нагласува нејзината централна позиција во концептуалната рамка на ова истражување.

1.4. Улогата на динамичките графови

Анализата на сложените мрежни динамички системи бара теоретски инструменти кои овозможуваат интегрирано разгледување на нивната структурна организација и динамичка еволуција. Во оваа насока, концептот на динамички графови се издвојува како значаен методолошки пристап што овозможува формализирана и систематска репрезентација на врските меѓу потсистемите и нивната временска промена. Преку ваквата репрезентација се воспоставува јасна врска меѓу тополошките својства на системот и неговото динамичко однесување [4], [8].

За разлика од класичните структурни модели кои претпоставуваат фиксна топологија на врските, реалните големоразмерни системи често се карактеризираат со временски променливи структури на поврзување, условени од внатрешната динамика на потсистемите или од надворешни влијанија. Оваа карактеристика ја нагласува потребата од аналитички рамки што ја опфаќаат временската зависност на структурните односи, при што динамичките графови обезбедуваат соодветен формален апарат за анализа на вакви процеси. [5]

Примената на динамичките графови овозможува поврзување на процесите на структурна трансформација со појавата на колективни динамички феномени во мрежните системи. На овој начин, структурната еволуција не се третира како пасивна карактеристика

на системот, туку како активен фактор што влијае врз стабилноста, синхронизацијата и можностите за управување. Овој пристап создава основа за развој на современи методи за анализа на системската стабилност, координацијата и синтезата на управувачки стратегии во услови на структурна варијабилност.

Во рамките на ова истражување, динамичките графови се разгледуваат како концептуална врска меѓу класичната теорија на динамички системи и современите мрежни пристапи во системската анализа. Нивната примена овозможува продлабочено разбирање на улогата на структурната еволуција во појавата и стабилизацијата на синхронизираниите режими, како и во формулирањето на нови пристапи за управување со сложени динамички структури.

Оттука, динамичките графови заземаат централна позиција во теоретската рамка на дисертацијата, претставувајќи основа за интеграција на структурната анализа, динамичката стабилност и управувачката синтеза во единствен системски пристап. Ваквата интеграција овозможува систематско разгледување на влијанието на тополошките промени врз динамичкото однесување на системот и отвора можности за развој на напредни методи за анализа и управување на големоразмерни мрежни системи.

1.5. Цели и научен придонес на истражувањето

Основната цел на ова истражување е развој на кохерентна теоретска и методолошка рамка за анализа, синхронизација и управување на сложени мрежни динамички системи. Во современата теорија на големоразмерни системи особено значење имаат структурните врски меѓу потсистемите, нивната стабилност и способноста за постигнување координирано колективно динамичко однесување. Во таа насока, истражувањето е насочено кон систематско поврзување на структурните својства на мрежите со динамичките процеси и управувачките механизми што го определуваат нивното функционирање.

Првата цел на истражувањето е теоретско и аналитичко утврдување на условите за синхронизабилност кај мрежните динамички системи. Во овој контекст синхронизацијата се разгледува како фундаментален механизам за усогласување на динамиката на меѓусебно поврзаните потсистеми, при што се анализира влијанието на структурните карактеристики на мрежата врз стабилноста и формирањето на колективни динамички режими. Особено внимание се посветува на улогата на спектралните својства на структурните матрици, степенот на поврзаност и присуството на параметарски неизвесности во процесот на постигнување и одржување на синхронизирано однесување.

Втората цел на истражувањето е систематско воведување и примена на концептот на динамички графови како теоретска основа за формализирање на структурни врски во мрежните системи. Динамичките графови овозможуваат квалитативна и квантитативна анализа на тополошките својства на системите, нивната стабилност и условите за појава на колективни динамички феномени. Во рамките на истражувањето овој концепт се користи како методолошка основа за структурна декомпозиција, агрегација и анализа на влијанието на мрежната топологија врз процесите на синхронизација и управување.

Третата цел на истражувањето е развој на пристапи за структурно-променливо управување кај класа на генерализирани меѓуповрзани динамички системи. Во овој контекст се анализираат условите за стабилизација, регуларност и робусност, како и можностите за синтеза на децентрализирани управувачки закони што обезбедуваат стабилно функционирање на сложените мрежни структури во присуство на структурни варијации и параметарски нарушувања.

Конечната цел на истражувањето е формулирање на интегративен надзорен управувачки концепт кој ги обединува резултатите од анализата на синхронизабилноста, структурната динамика и децентрализираната контрола во единствена системска теоретска рамка. Овој концепт има за цел да обезбеди конзистентна синтеза на управувачки стратегии применливи кај широк спектар на сложени мрежни системи, создавајќи основа за понатамошен развој на интелигентни и адаптивни управувачки структури.

Со реализацијата на поставените цели се очекува воспоставување на цврста научна основа за анализа и управување на сложени динамички системи која ги интегрира класичните резултати од теоријата на големоразмерни системи со современите пристапи засновани врз мрежна структура, структурна динамика и напредни алгоритамски методи. Ваквата интеграција претставува предуслов за развој на нови теоретски и практични решенија во управувањето со комплексни технолошки, инфраструктурни и природни системи.

Научниот придонес на ова истражување произлегува од формулирањето на нови теоретски резултати и методолошки пристапи во областа на анализа и управување на сложени мрежни динамички системи. Во рамките на дисертацијата се развива интегрирана системска рамка која ја поврзува структурната организација на големоразмерните системи со нивното колективно динамичко однесување и управувачката синтеза. Оригиналните научни резултати се концентрирани во поглавјата 4, 6 и 7, додека останатите поглавја претставуваат теоретска основа и концептуален мост кон нивното формулирање.

Првиот научен придонес се однесува на развој на системска теорија за синхронизабилност кај мрежни меѓуповрзани динамички системи. Во рамките на истражувањето се формулираат нови услови за појава и стабилност на синхронизирани динамички режими, засновани врз интеграција на структурните својства на мрежата со спектралните карактеристики на системските матрици. Особен научен резултат претставува теоретската анализа на далекусежните ефекти на синхронизабилноста, со што се проширува постојната концептуална рамка за синхронизација кај големоразмерни и структурно-хетерогени системи. Овој придонес е систематски разработен во четвртото поглавје.

Вториот научен придонес се однесува на формулирање на пристап за структурно-променливо управување кај класа на генерализирани меѓуповрзани динамички системи. Во рамките на дисертацијата се развива теоретска рамка за стабилизација и управување со системи со структурни варијации, при што се изведуваат услови за регуларност, стабилност и робусност. Дополнително се формулираат методи за синтеза на децентрализирани управувачки закони кои овозможуваат контролирано динамичко однесување во услови на параметарски неизвесности и структурни нарушувања. Овој придонес е изложен во шестото поглавје.

Третиот научен придонес се однесува на развој на интегративен надзорен управувачки концепт за координирано управување со сложени мрежни динамички системи. Во рамките на истражувањето се формулира системски пристап кој ги интегрира резултатите од анализата на синхронизабилноста, структурната динамика и децентрализираната контрола во единствен теоретски модел. Предложениот концепт овозможува синтеза на надзорни управувачки механизми кои ја поврзуваат локалната динамичка информација со глобалните структурни својства на системот, создавајќи основа за координирано управување со сложени динамички структури. Овој придонес е разработен во седмото поглавје.

Со наведените резултати се воспоставува нов интегриран теоретски пристап во анализата и управувањето на сложени мрежни динамички системи, кој ја поврзува структурната анализа, синхронизацијата и управувачката синтеза во единствен концептуален систем. На тој начин дисертацијата придонесува кон унапредување на современата системска теорија и отвора нови истражувачки насоки во областа на управување со големоразмерни и структурно-комплексни системи.

1.6. Структура на дисертацијата

Дисертацијата е организирана во повеќе тематски целини кои го следат логичкиот и концептуален развој на теоретската рамка за анализа и управување на сложени мрежни динамички системи. Истражувањето започнува со формулирање на основните теоретски поставки, продолжува со анализа на структурните и динамичките својства на системите, а кулминира со развој на оригинални научни резултати и интегративни управувачки концепти.

Во првото поглавје се разгледуваат мотивите за истражувањето, неговото научно и практично значење, како и поставените цели и очекувани научни придонеси. Во ова поглавје се воспоставува општата концептуална рамка на дисертацијата и се дефинира системската перспектива на анализата.

Второто поглавје е посветено на преглед на модели за генерализирани меѓуповрзани и мрежни динамички системи. Во него се анализираат класичните состојбени модели, генерализираните дескрипторски формулации и претставувањето со графови на сложените системи. Посебно внимание се посветува на структурната декомпозиција, стабилноста и спектралните својства на големоразмерните системи, со што се воспоставува теоретска основа за понатамошната анализа на синхронизабилноста и управувањето.

Третото поглавје се однесува на анализа на мултимрежните структури и динамиката на системите од повисок ред. Во ова поглавје се формулира математички модел на мултимрежните динамички системи, се анализираат структурните варијации и нарушувања во поврзувањето, како и нивното влијание врз колективното динамичко однесување. На тој начин се поставува основа за спектралната анализа и проблемот на синхронизабилноста разгледани во следното поглавје.

Четвртото поглавје е посветено на проблемот на синхронизабилност кај мрежни меѓуповрзани динамички системи. Во него се формулираат условите за појава и стабилност на синхронизирани динамички режими, се анализираат спектралните предуслови за нивната стабилност и се разгледува влијанието на структурните карактеристики врз колективната

динамика. Особено се разработуваат далекусежните ефекти на синхронизабилноста како оригинален научен придонес на дисертацијата.

Петтото поглавје е посветено на концептот на динамички графови како теоретска основа за анализа на структурната еволуција на големоразмерните системи. Во него се разработуваат принципите на динамичките графови и нивната улога во формализирањето на временските промени на мрежната структура и нивното влијание врз динамичката стабилност и синхронизацијата.

Шестото поглавје се однесува на развој на пристапи за структурно-променливо управување кај класа на генерализирани меѓуповрзани динамички системи. Во него се анализираат условите за стабилизација, регуларност и робусност, како и методите за синтеза на децентрализираните управувачки закони. Предложениот пристап овозможува систематско управување со динамиката на сложените мрежни структури во услови на структурни варијации и параметарски неизвесности.

Седмото поглавје е посветено на формулирање на интегративен надзорен управувачки концепт кој ги обединува резултатите од структурната анализа, синхронизацијата и децентрализираната контрола во единствен теоретски систем. Во ова поглавје се развива системски пристап за координирано управување со мрежни динамички системи преку интеграција на локалните и глобалните динамички информации.

Во последното поглавје се изложуваат заклучните согледувања од истражувањето, при што се сумираат главните научни резултати и се идентификуваат насоки за понатамошни истражувања. Со тоа се заокружува развиената теоретска рамка и се истакнува значењето на предложените пристапи за унапредување на современата теорија на сложени мрежни динамички системи.

Со оглед на потребата од формализирана теоретска основа за анализата на структурните и динамичките аспекти на мрежните системи, во следното поглавје се дава систематски преглед на моделите за генерализирани меѓуповрзани и мрежни динамички системи, со што се поставува формалната рамка за понатамошната анализа на синхронизабилноста, динамичките графови и структурно-променливото управување.

1.7. Литература

- [1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [2] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.
- [3] L. Bakule, “Decentralized control: An overview,” *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 87–98, 2008.
- [4] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*. Providence, RI, USA: AMS, 1997.
- [5] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [6] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 2109–2112, 1998.
- [7] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [8] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.

ГЛАВА 2

ПРЕГЛЕД НА ГЕНЕРАЛИЗИРАНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Во ова поглавје се дава преглед на основните модели и концепти за анализа на генерализирани и меѓусебно поврзани динамички системи. Разгледувањето започнува од класичните состојбени модели, по што се воведуваат структурни и теоретски пристапи на графови за опис на меѓуповрзувачките врски.

Понатаму, се анализираат стабилноста, поврзувачката стабилност и мрежната формулација преку Лапласовата структура, при што се разгледуваат и ограничувањата на класичните модели. Посебно внимание се посветува на спектралните својства и предусловите за синхронизабилност кај мрежните динамички системи.

Во завршниот дел се воспоставува интегративна рамка која ги обединува разгледуваните концепти и претставува основа за понатамошната анализа во следните поглавја.

2.1 Класични состојбени модели на динамички системи

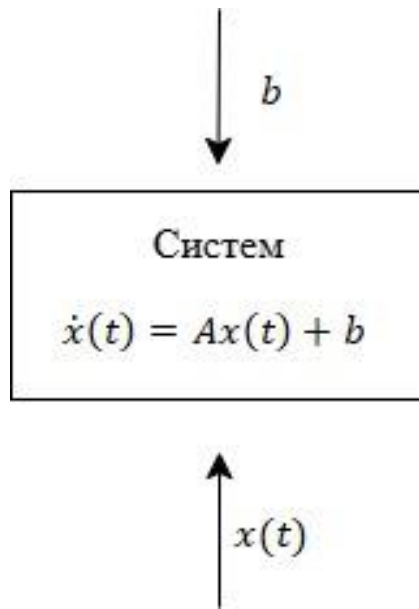
Теоријата на динамичките системи претставува фундаментална математичка рамка за формализација, анализа и синтеза на временски зависни процеси во природните, техничките и општествените науки. Посебно значење имаат системите составени од голем број меѓусебно поврзани компоненти, чие колективно однесување не може да се разбере исклучиво преку анализа на поединечните делови. Во такви ситуации, состојбениот пристап овозможува систематско моделирање на врските и динамичките својства на целокупниот систем [6].

Во општиот случај, линеарниот временско-инваријантен динамички систем може да се претстави во состојбена форма како:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b \quad (2.1)$$

каде што $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор кој ја опишува моменталната конфигурација на системот, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е системска матрица што ги карактеризира внатрешните динамички врски додека $b \in \mathbb{R}^n$ е вектор на надворешни влијанија. Променливата t го означува времето, додека точката над симболот означува временски извод.

Моделот (2.1) може да се интерпретира и со граф, при што векторот b го претставува надворешното влијание врз динамичкиот систем, како што е прикажано на слика 2.1.



Слика бр.2.1: Концептуален приказ на динамички систем со константно надворешно влијание

Овој модел претставува основа за опис на широк спектар процеси, почнувајќи од електромеханички системи и хемиски реакции, па сè до економски динамики и биолошки популации. Во контекст на големоразмерни системи, компонентите на состојбениот вектор се интерпретираат како динамички променливи на поединечни потсистеми, додека елементите на матрицата $A = (a_{ij})$ ја определуваат интензивноста и насоката на нивната меѓусебна интеракција [6].

Ако надворешните влијанија се занемарат, од (2.1) се добива т.н. слободен систем:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.2)$$

кој ја опишува внатрешната динамика на системот. За дадена почетна состојба $x(t_0) = x_0$, решението на (2.2) може да се изрази преку матричната експоненцијална функција:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad (2.3)$$

Овој резултат е фундаментален бидејќи ја поврзува стабилноста на динамичкиот систем со спектралните својства на матрицата A . Конкретно, ако сите сопствени вредности на A имаат негативен реален дел, тогаш рамнотежната состојба е глобално експоненцијално стабилна.

Во анализата на големоразмерни системи, посебно значење имаат матрици со специфична знакова структура. Една од најзначајните класи се т.н. Мецлерови (Metzler) матрици, дефинирани преку условите:

$$a_{ii} < 0, a_{ij} \geq 0, i \neq j \quad (2.4)$$

Оваа структура е карактеристична за системи со конкурентни или кооперативни врски. Негативните дијагонални елементи ја одразуваат тенденцијата на секој потсистем кон саморегулација, додека ненегативните недијагонални елементи ја претставуваат меѓусебната зависност или влијание [6], [8].

Во економските модели, ваквата структура може да ја опише динамиката на повеќе меѓусебно зависни пазари. Во биолошките системи, таа се појавува при моделирање на симбиотски или конкурентни популации, додека во хемиските реакции при процеси на автокатализа. Во сите овие случаи, динамичките врски можат да доведат до комплексни колективни режими на однесување.

Основниот проблем во теоријата на динамичките системи е анализата на стабилноста на рамнотежните состојби. За системот (2.2), тривијалната рамнотежа е:

$$x^* = 0 \quad (2.5)$$

Стабилноста на оваа состојба се дефинира преку граничното однесување на решението:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

каде што $\|\cdot\|$ означува Евклидова норма:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Во линеарните системи, стабилноста е тесно поврзана со дијагоналната доминација на системската матрица. Интуитивно, системот е стабилен доколку саморегулирачките ефекти на секој потсистем доминираат над меѓусебните врски. Овој принцип може да се формализира преку условите:

$$2|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

кои претставуваат доволен услов за експоненцијална стабилност на Мецлеровите системи.

Моќен метод за анализа на стабилноста претставува директниот методот на Љапунов (Lyapunov). Основната идеја е да се конструира скаларна функција $V(x)$ која е позитивно определена и чиј временски извод долж траекториите на системот е негативен:

$$V(x) > 0, V(0) = 0, \quad (2.9)$$

$$\dot{V}(x) < 0, x \neq 0. \quad (2.10)$$

Во линеарните системи, најчесто се користи квадратична форма:

$$V(x) = x^T P x \quad (2.11)$$

каде што $P = P^T > 0$ е симетрична позитивно определена матрица.

Со избор на соодветна Љапунова функција може да се докаже дека решенијата на системот задоволуваат неравенство од облик:

$$\|x(t)\| \leq \Pi \|x_0\| e^{-\pi(t-t_0)}, t \geq t_0 \quad (2.12)$$

каде што $\Pi > 0$ и $\pi > 0$ се позитивни константи кои ја карактеризираат границата и стапката на експоненцијална конвергенција, соодветно, што ја изразува глобалната експоненцијална стабилност на рамнотежата [6].

Од системска перспектива, ваквите резултати имаат длабоко значење во анализата на сложени меѓуповрзани системи. Тие покажуваат дека стабилноста не е само локално својство на поединечен потсистем, туку резултат на балансот меѓу внатрешните динамички механизми и структурните интеракции.

Понатаму, условите за стабилност можат да се интерпретираат како мерка за сложеноста на системот. Ако врските се премногу силни во однос на саморегулирачките ефекти, системот може да стане нестабилен, што доведува до осцилации, хаотично однесување или распад на структурната кохерентност.

Во современите истражувања, класичните состојбени модели претставуваат основа за понатамошна генерализација кон дескрипторски системи, нелинеарни модели и мрежни структури. Особено значајна е нивната улога во анализата на синхронизабилноста, каде што стабилноста на поединечните динамички единици мора да се разгледува во контекст на глобалната мрежна топологија.

Исто така, потребно е да се нагласи дека суштинска карактеристика на големоразмерни системи е нивната структурна зависност од врските меѓу поединечните потсистеми. Во рамките на линеарниот модел од облик (2.1), оваа зависност се изразува преку елементите на системската матрица $A = (a_{ij})$, кои ја определуваат јачината и насоката на меѓусебното влијание на состојбените променливи.

Во реалните системи, овие врски не се константни, туку често се подложни на промени предизвикани од надворешни услови или внатрешни динамички процеси. Ваквите промени се интерпретираат како структурни нарушувања, кои можат да доведат до привремено намалување или целосно прекинување на одредени врски меѓу потсистемите. Формално, ваквата појава може да се претстави преку модификација на системската матрица, односно преку премин од матрица A кон нова матрица A_s , така што:

$$A_s = A + \Delta A, \quad (2.16)$$

каде што $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ја претставува матрицата на структурни варијации.

Ако се претпостави дека нарушувањата се ограничени по интензитет, тогаш стабилноста на системот може да се анализира во рамките на робусната стабилност. Во овој случај, условот за стабилност на рамнотежната состојба може да се изрази преку спектралниот радиус на матрицата A_s .

Особено важна ситуација се јавува кога структурните нарушувања имаат бинарен карактер, односно одредени врски се или активни или неактивни. Тогаш динамичкиот модел може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = E(t)Ax(t), \quad (2.17)$$

каде што $E(t) = (e_{ij}(t))$ е матрица на поврзување со елементи:

$$e_{ij}(t) \in \{0,1\} \quad (2.18)$$

Овој модел ја опишува ситуацијата во која потсистемите можат да се исклучуваат и повторно да се поврзуваат, што претставува типичен случај во биолошките, економските и техничките мрежи.

Концептот на стабилност во вакви системи се проширува во поимот поврзувачка стабилност, која подразбира дека рамнотежната состојба останува стабилна за сите дозволени структури на матрицата $E(t)$. Формално, ова може да се дефинира преку условот:

$$\|x(t)\| \leq \Pi \|x_0\| e^{-\pi(t-t_0)}, \forall E(t), \quad (2.19)$$

што ја генерализира експоненцијалната стабилност од (2.12).

Ваквиот пристап е особено значаен во анализата на сложени системи, бидејќи овозможува утврдување на стабилноста без потреба од детално познавање на точната структура на поврзувањата во секој момент. Наместо тоа, доволно е да се утврдат услови врз основа на најнеповолниот структурен случај, што значително ја поедноставува анализата.

Од геометриска перспектива, структурните нарушувања можат да се интерпретираат како промени во топологијата на состојбениот простор. Динамичките траектории во таков простор се подложни на деформации, но доколку постои глобално валидна Љапунова функција, нивното асимптотско однесување останува непроменето.

Во практичната анализа на големоразмерни системи, стабилноста се поврзува и со концептот на динамичка сигурност. Овој поим ја опишува способноста на системот да го задржи своето функционално однесување и покрај структурните промени. Математички, динамичката сигурност може да се изрази преку ограниченоста на нормата на состојбениот вектор, односно:

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t)\| < \infty. \quad (2.20)$$

Ако дополнително важи асимптотска конвергенција кон рамнотежата, тогаш системот се смета за стабилен во силна смисла.

Важен аспект на оваа анализа е и разгледувањето на конкурентни и кооперативни динамички интеракции. Во конкурентните системи, зголемувањето на една состојбена променлива доведува до намалување на друга, додека во кооперативните системи ефектите се позитивно корелирани. Овие динамики се одразуваат во знаковната структура на матрицата A , како што беше наведено во условот (2.4).

Во системите со голем број компоненти, ваквите врски можат да доведат до појава на сложени колективни режими, како што се осцилации, синхронизација или хаотично однесување. Сепак, класичните состојбени модели овозможуваат да се утврдат основните услови под кои ваквите режими остануваат ограничени и контролирани.

Дополнително, концептот на структурна декомпозиција претставува важна алатка за анализа на големоразмерни системи. Со соодветна трансформација на состојбениот вектор, системот (2.1) може да се разложи на потсистеми од понизок ред, така што:

$$x = Tx_d, \quad (2.21)$$

каде што T е трансформатиска матрица, а x_d нов состојбен вектор со блок структура. Ова овозможува локална анализа на стабилноста и синтеза на децентрализирани управувачки закони.

Во современите истражувања, ваквите методи се прошируваат кон нелинеарни и временски променливи системи, како и кон мрежни структури со голем број јазли. Сепак, класичниот состојбен пристап останува основа врз која се градат сите понатамошни генерализации.

На овој начин, може да се заклучи дека класичните состојбени модели претставуваат суштинска теориска основа за разбирање на динамичките својства на меѓуповрзаните системи. Тие овозможуваат формализација на врските, анализа на стабилноста и развој на методи за управување, кои се од клучно значење во современата теорија на комплексни динамички мрежи.

Во анализата на стабилноста на сложени меѓуповрзани системи, особено важна улога има примената на диференцијалните нееднакости и т.н. принцип на споредба. Овој принцип овозможува утврдување на асимптотското однесување на решенијата на динамичкиот систем без потреба од експлицитно решавање на соодветните диференцијални равенки. Наместо тоа, се врши споредување на динамичката еволуција на одредена функција со решението на поедноставен помошен систем.

Да се разгледа скаларна функција $v(t)$, која ја претставува Љапуновата функција на системот и која задоволува диференцијална нееднаквост од облик:

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v), \quad (2.22)$$

каде што $f(t, v)$ е континуирана функција која ја опишува динамиката на енергетскиот или стабилизациониот индекс на системот.

Нека $r(t)$ е решение на диференцијалната равенка:

$$\dot{r}(t) = f(t, r), \quad (2.23)$$

со почетен услов:

$$r(t_0) = v(t_0). \quad (2.24)$$

Тогаш, според принципот на споредба, важи нееднаквоста:

$$v(t) \leq r(t), t \geq t_0 \quad (2.25)$$

Овој резултат има суштинско значење во теоријата на стабилноста, бидејќи овозможува оценка на однесувањето на сложени динамички системи преку анализа на едноставни помошни модели. Особено, ако решението $r(t)$ асимптотски конвергира кон нула, тогаш истото важи и за функцијата $v(t)$, што имплицира стабилност на разгледуваниот систем.

За да биде применлив принципот на споредба во поширок контекст, потребно е функцијата $f(t, v)$ да го задоволува условот на Липшиц (Lipschitz), односно да постои константа $L > 0$ така што:

$$|f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq L |v_1 - v_2| \quad (2.26)$$

за сите релевантни вредности на аргументите. Овој услов гарантира единственост и континуитет на решенијата на помошната равенка (2.23), што е неопходно за валидност на споредбата.

Во контекст на големоразмерни системи, принципот на споредба овозможува утврдување на стабилноста при структурни нарушувања. Доколку Љапуновата функција на системот задоволува нееднаквост од облик:

$$\dot{V}(x) \leq -2\pi V(x), \quad (2.27)$$

каде што $\pi > 0$ е константа независна од структурните варијации, тогаш решението на системот задоволува експоненцијална оценка од облик:

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2\pi(t-t_0)} \quad (2.28)$$

Оттука следи дека нормата на состојбениот вектор задоволува нееднаквост од типот на (2.12), што ја потврдува глобалната експоненцијална стабилност на системот.

Важноста на овој резултат е во тоа што стабилноста се утврдува без потреба од точна спецификација на сите параметри или меѓуповрзувачката структура. Доволно е да се утврдат граници врз основа на најнеповолните услови, што ја прави оваа метода особено применлива во анализата на робусни и децентрализирани системи.

Дополнително, принципот на споредба може да се прошири и на нелинеарни и временски променливи системи, при што меѓуповрзувачките функции можат да зависат од времето и состојбата. Во таков случај, стабилноста се утврдува преку ограниченоста на овие функции, односно преку услови од облик:

$$0 \leq e_{ij}(t, x) \leq 1 \quad (2.29)$$

што обезбедува дека динамичките интеракции не ја надминуваат критичната граница на стабилност.

На овој начин, принципот на споредба претставува мост меѓу класичната теорија на стабилност и современите концепти на динамичка робусност и поврзувачка стабилност. Тој овозможува формулирање на општи критериуми за стабилност кои важат за цели класи системи, што е од особено значење во анализата на комплексни мрежни структури.

Со воведувањето на овој концепт, секцијата за класични состојбени модели се заокружува во теориска целина која ги опфаќа основните принципи на динамичката анализа. Во следната секција, овие идеи природно ќе се прошират преку воведување на теоретски модели на графови и формализација на структурните аспекти на меѓуповрзаните системи.

2.2 Структура на динамички системи и претставување со графови

Во анализата на динамичките големоразмерни системи, структурниот аспект претставува клучен елемент за разбирање на нивното колективно однесување. За разлика од класичните системи со мал број променливи, кај сложените меѓуповрзани системи не е доволно да се разгледуваат само параметрите на системската матрица, туку е неопходно да се анализира и топологијата на врските меѓу потсистемите. Ова води кон потреба од

воведување на теоретски концепти за графови, кои овозможуваат формализација на поимот структура [2], [4].

Се разгледува динамичкиот систем во форма:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.30)$$

кој претставува слободна верзија на општиот модел (2.1). Во овој случај, матрицата $A = (a_{ij})$ не само што ја определува динамиката на системот, туку ја определува и неговата структурна конфигурација. Елементот a_{ij} ја претставува директната поврзаност на j -тата состојба врз i -тата состојба.

За да се апстрахира од конкретните вредности на параметрите и да се фокусира исклучиво на присуството или отсуството на врски, се воведува бинарна матрица на поврзување:

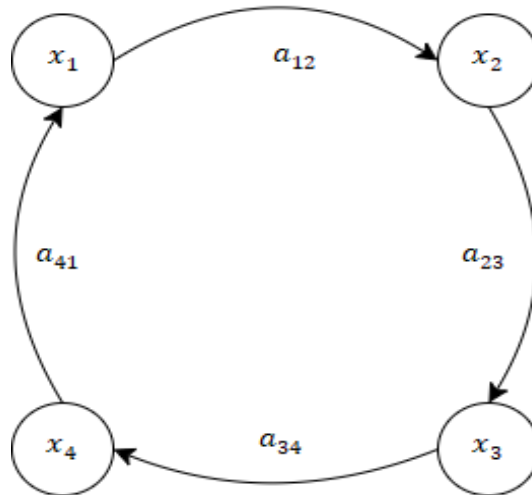
$$\bar{E} = (\bar{e}_{ij}), \quad (2.31)$$

каде што:

$$\bar{e}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако постои врска од } x_j \text{ кон } x_i, \\ 0, & \text{инаку.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Матрицата $\bar{E}$ ја претставува основната структурна матрица на системот и може да се интерпретира како матрица на соседство на соодветниот насочен граф.

Во рамки на теоријата на графови, секоја состојбена променлива x_i се претставува како јазол, додека секој ненулти елемент a_{ij} се претставува како насочена гранка. Така, динамичкиот систем може да се разгледува како насочена динамичка мрежа, чија топологија има суштинско влијание врз стабилноста и колективната динамика. Претставувањето на системот со граф е прикажана на слика 2.2.



Слика бр. 2.2: Претставување на динамички систем со граф, каде состојбените променливи x_i се претставени како јазли, а ненултните елементи a_{ij} како насочени врски.

Во големоразмерни системи, структурните врски не се статични. Потсистемите можат да се исклучуваат или повторно да се поврзуваат, што доведува до промени во матрицата на поврзување. Овие појави се опишуваат преку семејство матрици:

$$E \in \mathcal{E}(\bar{E}), \quad (2.33)$$

каде што $\mathcal{E}(\bar{E})$ ја означува класата на сите матрици добиени од $\bar{E}$ со замена на одредени единични елементи со нули.

Овој формализам овозможува моделирање на структурни нарушувања, кои можат да се интерпретираат како губење на врските меѓу потсистемите. Во екосистемите, тоа може да претставува исчезнување на врски меѓу видови, во техничките системи како дефект на комуникациска врска а во економските системи како прекин на пазарна зависност.

Со воведување на матрицата на поврзување, динамичкиот модел може да се запише во облик:

$$\dot{x}(t) = A(E)x(t) \quad (2.34)$$

каде што матрицата $A(E)$ зависи од конкретната структура на поврзувањата. Овој пристап овозможува разгледување на цели класи динамички системи наместо поединечен модел.

Теоријата на графови овозможува и дефинирање на структурни својства како што се: поврзаност, компоненти и циклуси. На пример, ако графот е силно поврзан, тогаш постои пат меѓу секој пар јазли, што имплицира постоење на глобални механизми на меѓуповрзување. Наспроти тоа, распаѓот на графот на повеќе компоненти укажува на можност за независно динамичко однесување на потсистемите.

Во контекст на стабилноста, структурата игра двојна улога. Од една страна, силната поврзаност може да ја подобри координацијата меѓу потсистемите, но од друга страна, може да доведе до зголемена сложеност и ризик од нестабилност. Затоа, анализата на динамичките големоразмерни системи бара балансирано разгледување на структурните и параметарските аспекти.

Дополнително, матрицата на поврзување овозможува формализација на концептот на структурна сигурност. Доколку стабилноста на системот се задржува за сите матрици $E \in \mathcal{E}(\bar{E})$, тогаш системот се смета за структурно-робустен. Овој поим претставува основа за понатамошен развој на теоријата на поврзувачка стабилност и децентрализирано управување.

Во современите истражувања, претставувањето со графови претставува мост кон теоријата на мрежни динамички системи, каде што локалната динамика на јазлите се комбинира со глобалната топологија на мрежата. Ова овозможува анализа на феномени како: синхронизација, колективни осцилации и распределено управување.

Со воведување на структурниот пристап, класичниот состојбен модел се проширува во поширока рамка која ги опфаќа не само параметрите, туку и тополошките својства на системот. Ова претставува важен чекор кон формализација на сложените динамички мрежи, кои ќе бидат предмет на понатамошна анализа.

Продлабочувајќи ја формализацијата на теоријата на графови на динамичките системи, потребно е да се направи разлика меѓу структурни нарушувања на врските и структурни нарушувања на јазлите. Во првиот случај, динамичките врски меѓу потсистемите се менуваат без да се отстрани самата состојбена променлива, додека во вториот случај се јавува целосно исклучување на одреден потсистем од процесот на меѓуповрзување.

Формално, структурно нарушување на врските може да се претстави преку модификација на матрицата на поврзување (2.31), така што:

$$E = \bar{E} - \Delta E \quad (2.35)$$

каде што ΔE е бинарна матрица која ги означува отстранетите меѓуповрзувачки врски. Овој модел овозможува систематско разгледување на различни структурни конфигурации во рамките на една класа динамички системи.

Од друга страна, структурно нарушување на јазол може да се интерпретира како отстранување на цела состојбена компонента од системот. Во таков случај, динамичкиот модел се редуцира на потсистем од понизок ред, што може да се формализира преку трансформација на состојбениот вектор. Ако се означи новата структура со матрица E_k , тогаш динамиката може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = A(E_k)x(t), \quad (2.36)$$

при што матрицата $A(E_k)$ се добива со елиминација на редовите и колоните што одговараат на исклучениот потсистем.

Ваквите структурни варијации имаат директно влијание врз стабилноста и динамичката сигурност. Особено, ако системот е стабилен за основната структура $\bar{E}$, тогаш може да се испита дали стабилноста се задржува и за сите матрици E добиени од неа. Овој пристап претставува основа за дефинирање на поврзувачката стабилност, која ќе биде детално разгледана во следните делови.

Покрај бинарните структури, во многу практични системи поврзувачките параметри можат да зависат од времето или од состојбата на системот. Во таков случај, елементите на матрицата на поврзување можат да се разгледуваат како функции:

$$e_{ij} = e_{ij}(t, x) \quad (2.37)$$

при што се претпоставува ограниченост од облик:

$$0 \leq e_{ij}(t, x) \leq 1 \quad (2.38)$$

Овој услов обезбедува дека динамичките врски остануваат во граници кои не ја нарушуваат стабилноста на системот. Воведувањето на временски променливи структури овозможува формализација на динамички мрежи во кои врските се адаптивни или стохастички.

Дополнително, структурата на динамичкиот систем може да се опише и преку вектор на надворешни влијанија, кој ја претставува врската со надворешната околина. Ако

надворешните влијанија се означат со вектор $d(t)$, тогаш проширениот модел може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + d(t) \quad (2.39)$$

што претставува генерализација на моделот (2.30). Во теоретската интерпретација на графови, компонентите на векторот $d(t)$ се разгледуваат како дополнителни јазли кои ја претставуваат околината на системот.

Ваквата формализација овозможува анализа на влијанието на надворешните фактори врз стабилноста и колективната динамика. Особено, може да се утврди дали системот останува стабилен при варијации на надворешните параметри, што претставува важен аспект на робусната анализа.

Во контекст на сложените динамички системи, геометриската интерпретација на структурата се заснова на концептот на состојбен простор. Секоја структурна конфигурација одговара на одреден облик на динамичките траектории, при што структурните нарушувања се интерпретираат како деформации на фазниот простор. Овој пристап овозможува интуитивно разбирање на врската меѓу топологијата и динамиката.

Дополнително, претставувањето со графови овозможува формулирање на критериуми за поврзаност и декомпозиција. Ако графот може да се раздели на повеќе независни компоненти, тогаш соодветниот динамички систем може да се разложи на потсистеми кои се анализираат одделно. Ова претставува важен чекор кон децентрализирана анализа и синтеза на управувачки закони.

Во современата теорија, структурниот пристап претставува мост меѓу класичната теорија на динамички системи и теоријата на комплексни мрежи. Тој овозможува формализација на поими како што се: синхронизација, распределена стабилизација и колективно однесување.

Со тоа, секцијата за структура и претставувањето со графови ја заокружува теориската рамка потребна за понатамошно разгледување на поврзувачката стабилност и децентрализираното управување. Во следната секција ќе се продлабочи анализата на стабилноста во контекст на структурни варијации и динамички графови.

2.3 Стабилност и поврзувачка стабилност на меѓуповрзани системи

Во анализата на динамичките големоразмерни системи, концептот на стабилност добива пошироко значење отколку во класичната теорија на системи од мал ред. Кај меѓуповрзаните системи, стабилноста не се однесува само на асимптотското однесување на поединечен динамички модел, туку и на способноста на системот да ја задржи стабилната рамнотежа при варијации на структурните и параметарските услови [6], [8].

Да се разгледа меѓуповрзан динамички систем во состојбена форма:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.40)$$

каде што $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор, а $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е системска матрица која ја опфаќа структурата на поврзувањата.

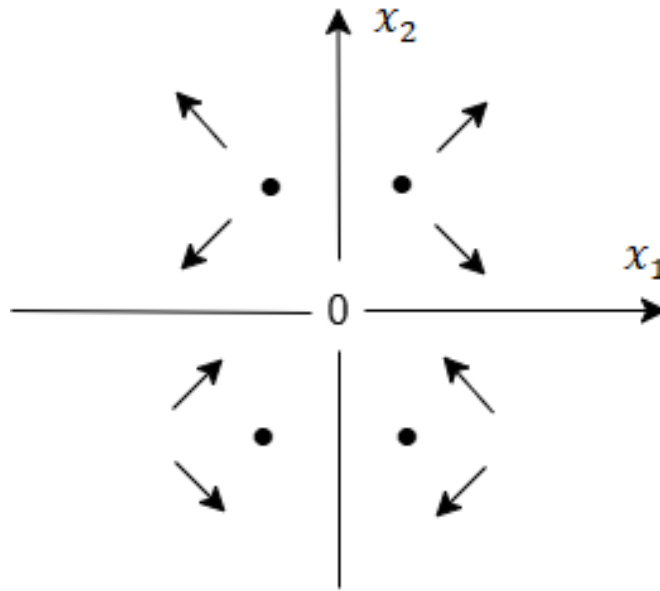
Рамнотежната состојба на системот (2.40) е дадена со:

$$x^* = 0 \quad (2.41)$$

а нејзината стабилност се дефинира преку условот:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

Ова однесување може да се интерпретира преку конвергенцијата на состојбените траектории во фазниот простор, како што е прикажано на слика 2.3.



Слика бр. 2.3: Илустрација на асимптотска стабилност преку конвергенција на состојбените траектории кон рамнотежната точка.

Во контекст на големоразмерни системи, особено значајно е прашањето дали стабилноста на рамнотежната состојба се задржува при промени во структурата на поврзувањата. Ова води кон концептот на поврзувачка стабилност, кој ја проширува класичната дефиниција на стабилност.

За да се формализира овој концепт, се воведува матрица на поврзување $E = (e_{ij})$, така што динамичкиот модел може да се запише во облик:

$$\dot{x}(t) = A(E)x(t) \quad (2.43)$$

каде што матрицата $A(E)$ зависи од конкретната структурна конфигурација.

Рамнотежата $x^* = 0$ се нарекува поврзувачки стабилна ако е стабилна за сите матрици E од дадена класа структурни варијации. Овој поим претставува клучен концепт во теоријата на динамичките големоразмерни системи, бидејќи реалните системи ретко имаат фиксна структура.

Анализата на стабилноста може да се спроведе преку директниот метод на Љапунов. Нека постои функција $V(x)$ која задоволува услови од облик:

$$V(x) > 0, V(0) = 0, \quad (2.44)$$

$$\dot{V}(x) < 0, x \neq 0 \quad (2.45)$$

Тогаш рамнотежата $x^* = 0$ е асимптотски стабилна.

Во големоразмерни системи, често се користи квадратична Љапунова функција:

$$V(x) = x^T P x \quad (2.46)$$

каде што P е симетрична позитивно определена матрица.

Особено важен резултат е дека доколку постои Љапунова функција која е независна од структурата E , тогаш системот е поврзувачки стабилен. Овој услов овозможува утврдување на стабилноста за цела класа динамички модели со различни топологии.

Во практичната анализа, стабилноста често се поврзува со дијагоналната доминација на системската матрица. Ако важи услов од облик:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad (2.47)$$

тогаш системот е стабилен. Овој резултат има особено значење кај Мецлерови системи, каде што знаковната структура игра суштинска улога во динамиката.

Дополнително, може да се покаже дека под одредени услови постојат позитивни константи Π и π така што:

$$\|x(t)\| \leq \Pi \|x_0\| e^{-\pi(t-t_0)} \quad (2.48)$$

што ја изразува глобалната експоненцијална стабилност на системот.

Во контекст на меѓуповрзаните системи, ваквата експоненцијална оценка има длабоко значење, бидејќи укажува дека динамичките ефекти на поврзувањата не доведуваат до зголемување на одговорот, туку напротив придонесуваат за стабилизирање на системот.

Концептот на поврзувачка стабилност е тесно поврзан со идејата за динамичка сигурност. Ако стабилноста се задржува при отстранување или модификација на одредени врски, тогаш системот може да се смета за структурно-робустен. Ова својство е особено важно во децентрализираното управување, каде што глобалната стабилност, мора да се гарантира без целосно познавање на сите параметри.

Во современите истражувања, поврзувачката стабилност претставува основа за анализа на мрежни динамички системи, синхронизација и распределени алгоритми за управување. Со тоа, класичната теорија на стабилност се проширува кон поширок концепт кој ги опфаќа структурните аспекти на динамичките процеси.

Продлабочувајќи ја анализата на стабилноста на меѓуповрзаните динамички системи, се јавува потреба од утврдување на услови под кои рамнотежната состојба останува стабилна и во присуство на структурни нарушувања. Како што беше истакнато, овие

нарушувања се одразуваат преку варијации во матрицата на поврзување E , што води кон динамички модел од обликот (2.43).

За да се утврди стабилноста на системот во вакви услови, особено значајна улога има примената на принципот на споредба. Овој принцип овозможува оценка на однесувањето на Љапуновата функција без потреба од експлицитно решавање на диференцијалните равенки.

Нека функцијата $V(x(t))$ ја задоволува диференцијалната нееднаквост:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\pi V(x(t)), \quad (2.49)$$

каде што $\pi > 0$ е константа независна од структурните варијации. Тогаш, според резултатите од теоријата на диференцијални нееднаквости, следи оценката:

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-2\pi(t-t_0)} \quad (2.50)$$

Оваа нееднаквост имплицира дека нормата на состојбениот вектор задоволува експоненцијална оценка од типот (2.48), што ја потврдува глобалната стабилност на системот.

Особено значајно е што условот (2.49) може да се формулира така што не зависи од конкретната структура на поврзувањата. Ова овозможува утврдување на стабилноста за цела класа динамички системи, што претставува суштинска предност во анализата на големоразмерни системи.

Понатаму, принципот на споредба може да се прошири и на нелинеарни и временски променливи системи. Во таков случај, матрицата на поврзување може да се разгледува како функција од времето и состојбата, односно:

$$E = E(t, x), \quad (2.51)$$

при што се претпоставува дека елементите $e_{ij}(t, x)$ се ограничени како во (2.38).

Во вакви услови, стабилноста може да се утврди преку споредување со линеарен помошен систем кој ги претставува најнеповолните структурни варијации. Овој пристап овозможува формализација на стабилноста во присуство на динамички промени на топологијата, што е од суштинско значење во анализата на адаптивни и стохастички мрежи.

Во практичната анализа, структурните нарушувања може да се класифицираат како локални или глобални. Локалните нарушувања се однесуваат на промени во ограничен број врски или потсистеми, додека глобалните нарушувања опфаќаат значителни промени во топологијата на мрежата.

За локалните нарушувања, стабилноста може да се анализира преку методи на нарушувања, додека за глобалните нарушувања се користат агрегирани мерки на сложеност. Во двата случаи, клучна улога има балансот меѓу саморегулирачките и взаемните ефекти.

Дополнително, концептот на динамичка сигурност се поврзува со способноста на системот да ги апсорбира структурните варијации без значително нарушување на неговото однесување. Математички, ова може да се формализира преку услов од облик:

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t)\| < \infty \quad (2.52)$$

што гарантира ограниченост на динамичкиот одговор.

Во системите со силна меѓуповрзаност, структурните варијации можат да доведат до појава на колективни режими како синхронизација или осцилации. Во такви ситуации, стабилноста на поединечните потсистеми не е доволна за гарантирање на глобалната стабилност, туку е потребна анализа на колективната динамика.

Истражувања покажуваат дека поврзувачката стабилност претставува фундаментален концепт во теоријата на мрежни динамички системи. Таа обезбедува основа за развој на методи за децентрализирано управување, распределена оптимизација и анализа на комплексни динамички мрежи.

Со тоа, концептот на стабилност се проширува од локално својство на поединечен динамички модел кон глобално својство на целата структура на системот. Овој пристап овозможува интегрирана анализа на параметарските и тополошките аспекти на динамичките процеси.

Продлабочувањето на анализата на стабилноста на големоразмерни системи природно води кон разгледување на концептот на структурна декомпозиција. Основната идеја е дека сложениот динамички систем може да се разложи на помали потсистеми чија динамика е полесна за анализа, додека меѓусебните влијанија се разгледуваат како дополнителни нарушувања.

Да се разгледа динамички систем од обликот:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.53)$$

каде што векторот на состојба може да се подели на блок компоненти:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Во таков случај, системската матрица може да се запише во блок-форма:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

при што секој блок A_{ii} ја опишува внатрешната динамика на потсистемот i , а блоковите A_{ij} , $i \neq j$, ги претставуваат меѓусебните влијанија.

Ако се претпостави дека секој изолиран потсистем:

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i \quad (2.56)$$

е стабилен, тогаш стабилноста на целокупниот систем зависи од јачината на меѓусистемските блокови A_{ij} . Овој резултат ја формализира интуитивната идеја дека

глобалната стабилност е условена од балансот меѓу локалната стабилност и структурната сложеност.

Во овој контекст се воведува поимот на агрегирана мерка на сложеност, која може да се дефинира преку нееднаквост од облик:

$$\|A_{ii}\| > \sum_{j \neq i} \|A_{ij}\| \quad (2.57)$$

што претставува генерализација на условот за дијагонална доминација (2.47).

Овој услов гарантира дека саморегулирачките ефекти доминираат над взаемните, што доведува до стабилност на целиот систем.

Дополнително, концептот на агрегација овозможува редукција на динамичкиот модел преку групирање на состојбени променливи со слична динамика. Со воведување на трансформација:

$$x = Ty \quad (2.58)$$

каде што T е трансформациона матрица, системот (2.53) може да се претстави во редуцирана форма:

$$\dot{y}(t) = T^{-1}ATy(t) \quad (2.59)$$

Овој пристап е особено корисен при анализа на системи со голем број компоненти, бидејќи овозможува фокусирање на доминантните динамички режими.

Покрај структурната декомпозиција, стабилноста на меѓуповрзаните системи може да се анализира и преку разгледување на типот на врските меѓу потсистемите. Во конкурентните системи, взаемните ефекти имаат спротивен знак во однос на саморегулирачките, додека во кооперативните системи тие се комплементарни. Оваа класификација е тесно поврзана со знаковната структура на системската матрица и со Мецлеровите услови наведени во (2.4).

Во конкурентните системи, стабилноста често се постигнува преку доволна дијагонална доминација, додека во кооперативните системи може да се јави тенденција кон колективна динамика како синхронизација или осцилации. Ова укажува дека структурата на меѓуповрзување има фундаментално влијание врз глобалното однесување на системот.

Геометриската интерпретација на стабилноста во големоразмерни системи се заснова на концептот на фазен простор. Декомпозицијата на системот води кон разделување на фазниот простор на подпростори кои одговараат на поединечни потсистеми. Стабилноста на целокупниот систем се утврдува преку анализа на динамиката во секој подпростор и нивното меѓусебно влијание.

Во современата теорија, овие идеи се поврзуваат со концептот на децентрализирано управување. Ако системот може да се декомпонира на стабилни потсистеми со ограничена меѓуповрзаност, тогаш е можно синтезирање на локални управувачки закони кои гарантираат глобална стабилност.

Овој резултат има значајна практична импликација, бидејќи овозможува управување на сложени системи без централизирана координација.

Со тоа, секцијата за стабилност и поврзувачка стабилност ја заокружува теориската рамка потребна за понатамошно разгледување на структурно-променливото управување и динамичките графови. Следните секции ќе ја продлабочат анализата на овие концепти, со фокус на мрежната топологија и синхронизабилноста.

2.4 Мрежна формулација и лапласијанска структура

Анализата на динамичките големоразмерни системи сè повеќе се заснова на нивната интерпретација како мрежни системи, при што состојбените променливи се разгледуваат како јазли на динамичка мрежа, а врските меѓу нив како врски со одредена јачина и насока. Овој пристап овозможува интеграција на класичната теорија на динамички системи со теориските методи на графови, што е од суштинско значење за анализа на комплексни меѓуповрзани процеси [2], [9].

Да се разгледа динамички систем од облик:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.60)$$

каде што $A = (a_{ij})$ е системска матрица која ја опфаќа топологијата на поврзувањата. Во мрежната интерпретација, секоја состојбена компонента x_i претставува јазол на графот, додека ненултиот елемент a_{ij} означува насочена врска од јазолот j кон јазолот i .

За да се формализира мрежната структура, се воведува матрица на соседство:

$$E = (e_{ij}), \quad (2.61)$$

која ја претставува бинарната или тежинската топологија на графот. Елементите e_{ij} ја означуваат присутноста или јачината на врската меѓу јазлите, а соодветната мрежна динамика може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = A(E)x(t), \quad (2.62)$$

што претставува генерализација на моделот (2.60).

Клучен поим во мрежната анализа на динамичките системи е лапласијанската матрица, дефинирана како:

$$L = D - E \quad (2.63)$$

каде што D е дијагонална матрица на степени на јазлите, чиј дијагонален елемент се дефинира како:

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^n e_{ij} \quad (2.64)$$

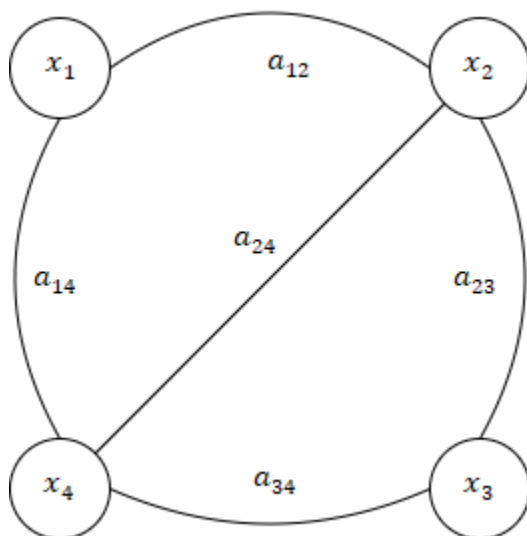
Лапласијанската матрица ја определува структурната информација за мрежата и има фундаментална улога во анализата на стабилноста, синхронизацијата и колективната динамика.

Со воведување на Лапласовата структура, динамичкиот систем може да се запише во облик:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (2.65)$$

што претставува основен модел за дифузивна поврзаност меѓу потсистемите. Овој модел ја опишува ситуацијата во која секој јазол се стреми да ја усогласи својата состојба со состојбите на соседните јазли.

Дифузионата природа на моделот (2.65), која ја опишува врската помеѓу соседните јазли во мрежата, може да се илустрира преку претставување со графови на мрежата и соодветната лапласијанска структура, како што е прикажано на слика 2.4.



Слика бр. 2.4 Претставување со граф на мрежен динамички систем со тежински врски a_{ij} , која ја илустрира дифузионата поврзаност помеѓу јазлите.

Спектралните својства на лапласијанската матрица имаат суштинско значење за динамичкото однесување на мрежата. Познато е дека лапласијанската матрица има барем една нулта сопствена вредност, која е поврзана со инваријантниот подпростор на униформни состојби. Останатите сопствени вредности ја определуваат брзината на конвергенција и стабилноста на синхронизираниите режими.

Во контекст на големоразмерни системи, лапласијанската формализација овозможува поврзување на локалната динамика на потсистемите со глобалната топологија на мрежата. Овој пристап претставува основа за анализа на распределени алгоритми, синхронизација и стабилизација на комплексни динамички структури.

Дополнително, лапласијанската матрица може да се прошири и за тежински и насочени графови, при што нејзината структура ја одразува асиметријата на меѓусебните

врски. Во такви случаи, стабилноста се анализира преку генерализирани спектрални услови, кои ја поврзуваат динамиката со топологијата на мрежата.

Со воведувањето на мрежната формулација, класичниот состојбен модел се трансформира во поширока рамка која ги опфаќа и тополошките аспекти на динамичките системи. Ова претставува клучен чекор кон современата теорија на комплексни динамички мрежи, во која стабилноста и синхронизацијата се разгледуваат како резултат на меѓусебното влијание на локалната динамика и глобалната структура.

Продлабочувајќи ја мрежната формализација на динамичките системи, може да се забележи дека лапласијанската структура овозможува природно поврзување помеѓу локалната динамика на потсистемите и глобалното однесување на целокупната мрежа. Во моделот (2.65), динамиката на секој јазол се определува преку разликата меѓу неговата состојба и состојбите на соседните јазли, што претставува основен механизам на дифузивна поврзаност.

Да се разгледа општ дифузивен модел од облик:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n e_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), i = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

кој е еквивалентен на векторската форма (2.65). Во овој израз, e_{ij} ја означува јачината на поврзаноста меѓу јазлите, додека разликата $x_j - x_i$ ја претставува тенденцијата кон усогласување на состојбите.

Овој модел може да се прошири со вклучување на локална динамика на јазлите. Нека секој потсистем има сопствена динамика опишана со матрица A , тогаш мрежниот модел може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Lx(t), \quad (2.67)$$

што претставува комбинација на локалната и дифузивната динамика. Во вакви системи, стабилноста зависи од взаемното дејство меѓу спектралните својства на матрицата A и лапласијанската матрица L .

За анализа на динамичките својства на мрежата, важно е да се разгледа спектралната декомпозиција на лапласијанската матрица. Нека $\lambda_k, k = 1, \dots, n$, се сопствени вредности на L , така што:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (2.68)$$

Вредноста λ_2 се нарекува алгебарска поврзаност и претставува мерка за степенот на поврзаност на мрежата. Колку е поголема оваа вредност, толку е посилна поврзаноста меѓу јазлите и побрза конвергенцијата кон синхронизирана состојба.

Спектралната анализа овозможува трансформација на системот (2.65) во координатен систем дефиниран со сопствените вектори на лапласијанската матрица. Со воведување на ортогонална матрица Q , така што:

$$Q^T L Q = \Lambda \quad (2.69)$$

каде што Λ е дијагонална матрица со сопствени вредности, системот може да се декуплира на независни модови. Ова овозможува анализа на стабилноста во секој мод поединечно.

Дополнително, лапласијанската структура овозможува формулирање на критериуми за стабилност на мрежните системи. Ако локалната динамика е стабилна и ако алгебарската поврзаност е доволно голема, тогаш глобалната динамика на системот ќе биде стабилна. Овој резултат ја поврзува топологијата на мрежата со динамичката сигурност.

Во системите со временски променлива топологија, лапласијанската матрица може да се разгледува како функција од времето, односно:

$$L = L(t), \quad (2.70)$$

се претпоставува дека мрежата останува поврзана во просечна смисла. Во вакви услови, стабилноста може да се анализира преку интегрални или стохастички методи. Понатаму, лапласијанската формализација овозможува дефинирање на енергетски функции на мрежата, кои се користат како Љапунови функции. На пример, може да се разгледа функција од облик:

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T L x \quad (2.71)$$

која ја мери дисперзијата на состојбите во мрежата. Намалувањето на оваа функција со текот на времето укажува на конвергенција кон синхронизирана состојба.

Со тоа, лапласијанската структура претставува фундаментална алатка за анализа на мрежните динамички системи. Таа овозможува поврзување на локалните динамички својства со глобалната топологија и претставува основа за развој на современи методи во теоријата на синхронизација, распределено управување и комплексни динамички мрежи.

Овој пристап ќе биде продлабочен во следниот дел, каде што ќе се разгледаат условите за синхронизација и стабилност во зависност од спектралните својства на мрежата.

Продолжувајќи ја анализата на мрежната динамика, посебно значење има разгледувањето на синхронизацијата како колективен режим на однесување. Во рамките на дифузивниот модел (2.66), синхронизираната состојба се дефинира со условот:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = \bar{x}(t), \quad (2.72)$$

каде што $\bar{x}(t)$ претставува заедничка траекторија на сите јазли. Оваа состојба може да се интерпретира како инваријантен подпростор на системот (2.65).

За да се анализира стабилноста на синхронизираната состојба, се воведува трансформација на координатите која го разделува синхронизираниот мод од преостанатите модови. Со користење на ортогоналната трансформација (2.69), системот (2.65) може да се запише во форма:

$$\dot{z}(t) = -(\Lambda \otimes I)z(t), \quad (2.73)$$

каде што $z(t) = Q^T x(t)$, Λ е дијагоналната матрица на сопствени вредности на L , а $\otimes$ означува Кронекеров (Kronecker) производ.

Од (2.73) следи дека динамиката на секој мод се определува преку соодветната сопствена вредност на лапласијанската матрица. Особено, стабилноста на синхронизацијата зависи од позитивноста на сопствените вредности λ_k , $k \geq 2$, наведени во (2.68).

Клучен резултат е дека ако:

$$\lambda_2 > 0 \quad (2.74)$$

тогаш мрежата е поврзана и синхронизацијата е можна. Овој услов ја поврзува топологијата на графот со динамичката координација на потсистемите.

Во присуство на локална динамика, моделот (2.67) може да се анализира преку модална декомпозиција. Со воведување на координатната трансформација $z = Q^T x$, системот се разделува на независни потсистеми од облик:

$$\dot{z}_k(t) = (A - \lambda_k I)z_k(t), k = 1, \dots, n. \quad (2.75)$$

Оттука следи дека стабилноста на секој мод зависи од спектралниот радиус на матрицата $A - \lambda_k I$. Особено, за синхронизацијата да биде стабилна, потребно е сите матрици $A - \lambda_k I$, $k \geq 2$, да бидат стабилни.

Дополнително, лапласијанската структура овозможува дефинирање на енергетски мерки на синхронизацијата. Ако се разгледа функцијата (2.71), нејзиниот временски извод долж траекториите на системот (2.65) е даден со:

$$\dot{V}(x) = -x^T L^2 x, \quad (2.76)$$

што е ненегативно дефинитна функција. Овој резултат укажува дека системот има тенденција кон намалување на дисперзијата на состојбите, односно кон синхронизација.

Во системите со насочени или тежински графови, лапласијанската матрица може да биде несиметрична, што води кон комплексни сопствени вредности. Во такви случаи, стабилноста се анализира преку реалните делови на сопствените вредности и преку генерализирани спектрални критериуми.

Понатаму, во временски променливи мрежи, лапласијанската матрица се разгледува како функција од времето, како што е наведено во (2.70). Ако мрежата останува поврзана во просечна смисла, тогаш синхронизацијата може да се постигне и при динамички промени на топологијата.

Современите истражувања ја прошируваат лапласијанската формализација кон нелинеарни мрежни системи, при што локалната динамика на јазлите може да биде опишана со нелинеарни функции. Во такви случаи, стабилноста на синхронизацијата се анализира преку комбинација на Љапунови методи и спектрална анализа.

Со тоа, мрежната формулација и лапласијанската структура претставуваат основа за современата теорија на синхронизација и стабилизација на комплексни динамички системи. Овие концепти ќе бидат дополнително развиени во следните секции, каде што ќе се разгледаат условите за робусна синхронизација и децентрализирано управување.

Продлабочувањето на мрежната формулација на динамичките системи води кон разгледување на пошироката класа структури во кои топологијата не е неопходно

симетрична или временски инваријантна. Во реалните системи, врските меѓу потсистемите често имаат насочен карактер, што подразбира дека влијанието на јазолот i врз јазолот j не мора да биде еднакво на влијанието во спротивна насока. Во такви ситуации, лапласијанската матрица може да се разгледува во генерализирана форма, при што нејзината структура ја одразува асиметријата на мрежата.

Да се разгледа насочена мрежа со матрица на соседство $E = (e_{ij})$, при што лапласијанската матрица се дефинира преку:

$$L = D - E \quad (2.77)$$

каде што дијагоналната матрица D е определена како во (2.64). Во овој случај, лапласијанската матрица може да биде несиметрична, а нејзините сопствени вредности може да имаат комплексни делови. Сепак, стабилноста на мрежната динамика се утврдува преку реалните делови на овие вредности.

Во насочените мрежи, поимот на поврзаност се проширува кон концептот на силна поврзаност, што подразбира постоење на насочен пат меѓу секој пар јазли. Овој структурен услов има директно влијание врз можноста за синхронизација и колективна стабилизација. Ако графот не е силно поврзан, системот може да се распадне на повеќе динамички независни компоненти.

Дополнително, во многу практични системи врските имаат различна јачина, што води кон воведување на тежински лапласијан. Во таков случај, елементите e_{ij} се реални позитивни броеви, а лапласијанската матрица ја одредува не само топологијата, туку и интензитетот на врските. Ова овозможува попрецизна анализа на динамичката координација и стабилноста.

Во големоразмерните системи, топологијата и динамиката се тесно поврзани преку компромис меѓу поврзаноста и стабилноста. Зголемувањето на бројот и јачината на врските може да ја подобри координацијата, но истовремено да доведе до зголемена чувствителност на структурни нарушувања. Овој компромис претставува фундаментален аспект во дизајнот и анализата на комплексни мрежни системи.

Понатаму, генерализацијата на лапласијанската структура води кон концептот на дескрипторски мрежни системи, во кои динамиката се опишува со комбинација на диференцијални и алгебарски равенки. Во такви системи, лапласијанската матрица може да се појави како дел од дескрипторската матрица, што овозможува интеграција на структурните и динамичките ограничувања.

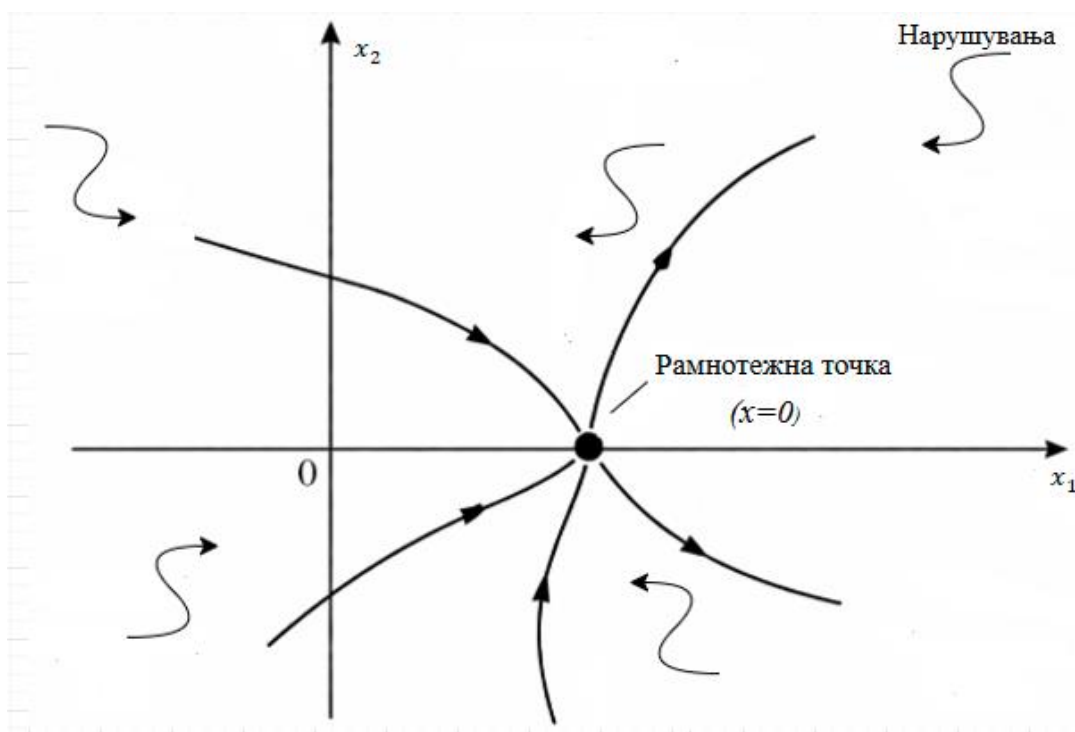
Во контекст на современите истражувања, мрежната формулација претставува мост меѓу класичната теорија на стабилност и современите методи за анализа на комплексни системи. Таа овозможува формализација на поими како што се синхронизација, распределено управување и структурна робусност, кои се од суштинско значење во инженерските и природните науки.

Со тоа, секцијата за мрежна формулација и лапласијанска структура ја заокружува теориската рамка потребна за понатамошна анализа на синхронизабилноста и структурно-променливото управување. Следните делови ќе ја продлабочат оваа анализа преку

разгледување на спектралните критериуми за стабилност и условите за робусна синхронизација во комплексни динамички мрежи.

2.5 Стабилност и робусност кај мрежните динамички системи

Во теорија на динамичките системи, стабилноста на мрежните структури не може да се разгледува изолирано од нивната топологија и структурна варијабилност. За разлика од класичните системи со фиксна конфигурација, кај мрежните динамички системи се јавуваат структурни промени, временски променливи врски и неизвесности кои имаат директно влијание врз динамичкото однесување. Ова води кон потреба од воведување на поширокиот концепт на робусна стабилност, кој ја опфаќа способноста на системот да ја задржи стабилната рамнотежа и во присуство на структурни нарушувања и параметарски варијации [6], [8]. Ова однесување може да се илустрира преку состојбените траектории во присуство на нарушувања, како што е прикажано на слика 2.5.



Слика бр. 2.5: Илустрација на робусна стабилност во присуство на надворешни нарушувања $d(t)$, при што сите состојбени траектории, и покрај континуираните нарушувања долж нивната еволуција, конвергираат кон рамнотежната точка.

Да се разгледа мрежен динамички систем во облик:

$$\dot{x}(t) = A(E)x(t) \quad (2.78)$$

каде што $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор, а матрицата $A(E)$ ја опфаќа мрежната структура преку матрицата на поврзување E .

Рамнотежната состојба на системот (2.78) е:

$$x^* = 0 \quad (2.79)$$

а нејзината стабилност се дефинира со условот:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \quad (2.80)$$

Во присуство на структурни варијации, матрицата $A(E)$ може да се разгледува како номиналната матрица A со структурни нарушувања, односно:

$$A(E) = A + \Delta A(E), \quad (2.81)$$

каде што $\Delta A(E)$ ја претставува матрицата на структурни нарушувања.

Концептот на робусна стабилност подразбира дека системот останува стабилен за сите дозволени варијации на $\Delta A(E)$. Овој услов може да се формулира преку постоење на Љапунова функција која е независна од структурата E .

Да се разгледа квадратична Љапунова функција од облик:

$$V(x) = x^T P x, \quad (2.82)$$

каде што $P = P^T > 0$.

Ако за сите дозволени структури важи:

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha \|x\|^2 \quad (2.83)$$

каде што $\alpha > 0$ е константа независна од структурните варијации, тогаш системот (2.78) е робусно стабилен.

Овој резултат ја формализира идејата дека стабилноста на мрежните динамички системи зависи не само од локалната динамика на поединечните јазли, туку и од глобалната структура на мрежата. Во овој контекст, лапласијанската матрица игра клучна улога, бидејќи нејзините спектрални својства ја определуваат чувствителноста на системот на структурни нарушувања.

Во системите со дифузивна поврзаност, стабилноста може да се поврзе со алгебарската поврзаност λ_2 на лапласијанска матрица. Ако оваа вредност е доволно голема, системот е помалку чувствителен на локални нарушувања и побрзо се стабилизира.

Дополнително, робусноста може да се разгледува и во контекст на временски променливи топологии. Ако матрицата на поврзување зависи од времето, односно $E = E(t)$, тогаш динамичкиот модел се запишува како:

$$\dot{x}(t) = A(E(t))x(t) \quad (2.84)$$

Во вакви услови, стабилноста се утврдува преку просечни или интегрални критериуми, кои ја опфаќаат динамичката еволуција на мрежната структура.

Понатаму, концептот на робусна стабилност е тесно поврзан со структурната сигурност, која ја опишува способноста на системот да ја задржи стабилноста при отстранување или модификација на одредени врски. Овој поим има значајна улога во дизајнот на децентрализирани управувачки стратегии, каде што глобалната стабилност мора да се гарантира без целосно познавање на сите параметри.

Во теорија на мрежните динамички системи, робусната стабилност претставува основа за анализа на синхронизацијата, распределеното управување и оптимизацијата во комплексни динамички мрежи. Со тоа, стабилноста се разгледува како резултат на поврзанооста меѓу локалната динамика и глобалната топологија.

Продлабочувањето на концептот на робусна стабилност во мрежните динамички системи води кон разгледување на стабилноста во присуство на робусна синхронизација и стохастички нарушувања. Во сложените мрежи, синхронизацијата не се јавува само како резултат на детерминистичка интеракција, туку често е под влијание на случајни варијации во параметрите или топологијата.

Да се разгледа мрежен динамички систем од облик:

$$\dot{x}(t) = A(E)x(t) + w(t), \quad (2.85)$$

каде што $w(t) \in \mathbb{R}^n$ претставува стохастички или детерминистички нарушувачки сигнал. Во вакви услови, стабилноста се разгледува во смисла на ограниченост на состојбениот вектор, односно:

$$\sup_{t \geq t_0} \mathbb{E} \|x(t)\|^2 < \infty, \quad (2.86)$$

што претставува услов за стабилност во средна квадратична смисла.

Во системите со дифузивна поврзаност, робусната синхронизација може да се анализира преку спектралните својства на лапласијанската матрица. Ако локалната динамика е стабилна и ако алгебарската поврзаност λ_2 е доволно голема, тогаш мрежата ја задржува синхронизацијата и во присуство на нарушувања.

Понатаму, во адаптивните мрежи топологијата може да се менува во зависност од состојбата на системот, што води кон динамички модел од облик:

$$\dot{x}(t) = A(E(t, x))x(t). \quad (2.87)$$

Во вакви системи, стабилноста се утврдува преку комбинирана анализа на структурната динамика и локалните својства на потсистемите. Овој пристап е особено релевантен во биолошките и технолошките мрежи, каде што врските се адаптивни и нелинеарни.

Дополнително, робусноста може да се разгледува и преку компромисот меѓу стабилноста и сложеноста на мрежата. Зголемувањето на бројот на врски може да ја подобри координацијата, но истовремено да ја зголеми чувствителноста на системот на нарушувања. Овој компромис претставува фундаментален аспект во дизајнот на мрежните динамички системи.

Во современите истражувања, концептот на робусна стабилност се проширува кон анализа на нелинеарни и стохастички мрежи, при што стабилноста се утврдува преку комбинација на Љапунови методи, спектрална анализа и теорија на веројатност.

Со тоа, секцијата за стабилност и робусност ја заокружува теориската рамка потребна за понатамошно разгледување на синхронизацијата и децентрализираното управување во комплексни динамички мрежи.

2.6 Ограничувања на класичните модели

Иако класичната состојбена формализација претставува фундаментална математичка рамка за анализа на динамичките системи, нејзината применливост во големоразмерни системи е ограничена од низа концептуални и структурни фактори. Овие ограничувања произлегуваат од основните претпоставки врз кои е изградена класичната теорија, а кои не секогаш се исполнети во современите сложени динамички структури [6].

Да се разгледа линеарен динамички систем во состојбена форма:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.88)$$

кој претставува основен модел на класичната динамика. Во рамките на оваа формализација се претпоставува дека динамичкиот процес може целосно да се опише преку систем на обични диференцијални равенки, при што состојбените променливи се независни и нивната еволуција е непрекината функција од времето. Сепак, во големоразмерни системи често се јавуваат алгебарски врски и структурни зависности кои не можат да се опфатат во ваков опис, што ја ограничува применливоста на моделот.

Дополнително, класичната теорија претпоставува фиксна структурна конфигурација, односно системската матрица се разгледува како временски инваријантна. Во реалните мрежните системи, топологијата може да се менува под влијание на динамички процеси, адаптивни механизми или надворешни фактори. Во такви услови, динамичкиот модел добива облик:

$$\dot{x}(t) = A(E(t))x(t) \quad (2.89)$$

што ја надминува рамката на класичните временски инваријантни системи и ја наметнува потребата од поопшти аналитички пристапи.

Суштинско ограничување на класичните модели е и претпоставката за линеарност на динамиката. Во многу природни и технички процеси, еволуцијата на состојбените променливи е нелинеарна и не може адекватно да се опише преку линеарна зависност. Ова води кон модели од облик:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.90)$$

каде што функцијата $f(\cdot)$ ја опфаќа нелинеарната природа на процесот. Во вакви системи, стабилноста не може да се анализира исклучиво преку спектралните својства на системската матрица, туку бара примена на поопшти методи од нелинеарната теорија на стабилност.

Понатаму, класичната формализација ја претпоставува локалната природа на поврзувањето меѓу потсистемите. Во сложените динамички мрежи, врските можат да имаат глобален карактер и да зависат од состојбата на целиот систем, што доведува до појава на колективни феномени кои не можат целосно да се објаснат во рамките на традиционалните модели.

Ограничувањата се појавуваат и во анализата на колективните режими на однесување, како што се синхронизацијата и самоорганизацијата. Овие појави произлегуваат од поврзаноста на голем број динамички единици и не можат да се редуцираат на анализа на

поединечен потсистем. Како резултат на тоа, класичните методи често не обезбедуваат доволна аналитичка прецизност за опис на ваквите процеси.

Дополнително, со зголемување на димензионалноста на системот, класичните аналитички и нумерички методи стануваат сè потешко применливи. Ова ја нагласува потребата од развој на нови концептуални рамки кои ја интегрираат динамичката анализа со структурните и тополошките аспекти на големоразмерни системи.

Со оглед на наведеното, може да се заклучи дека класичните состојбени модели претставуваат неопходна, но не и доволна основа за анализа на современите комплексни динамички системи. Овие ограничувања создаваат природна мотивација за воведување на генерализирани модели, кои ќе бидат разгледани во продолжение.

Продлабочувањето на ограничувањата на класичните состојбени модели природно води кон потребата од воведување на пошироки математички формализации кои овозможуваат поадекватен опис на сложените динамички системи. Една од најзначајните генерализации претставуваат дескрипторските динамички системи, кај кои динамиката се опишува со комбинација на диференцијални и алгебарски равенки. Во општ облик, ваквиот модел може да се запише како:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.91)$$

каде што матрицата $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ не мора да биде регуларна. Присуството на сингуларна матрица E ја одразува појавата на алгебарски ограничувања и структурни врски меѓу состојбените променливи. Овој тип формализација овозможува поадекватен опис на технички, економски и биолошки системи во кои динамиката е условена од дополнителни ограничувачки релации.

Покрај дескрипторските модели, во анализата на големоразмерни системи се јавува потреба од интеграција на нелинеарни динамички структури. Нелинеарноста може да произлезе од физичката природа на процесите, од заситување на параметрите или од сложените механизми на поврзување меѓу потсистемите. Во такви ситуации, динамиката се опишува преку модел од облик:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (2.92)$$

каде што функцијата $f(\cdot)$ ја опишува нелинеарната еволуција на системот. Анализата на стабилноста во вакви системи бара примена на поопшти методи, како што се Љапуновите директни методи, инваријантните множества и спектрално нелинеарните техники.

Во реалните мрежни системи, динамичките процеси често се подложни на случајни нарушувања и стохастички варијации. Ова води кон воведување на стохастички модели од облик:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(x, t)\xi(t), \quad (2.93)$$

каде што $\xi(t)$ претставува стохастички процес, а функцијата $\sigma(x, t)$ ја одредува јачината на нарушувањата. Во вакви системи, стабилноста се разгледува во смисла на веројатносна ограниченост или стабилност во средна квадратична смисла.

Дополнително, современите динамички мрежи често се карактеризираат со временски променлива и адаптивна топологија. Во такви системи, врските меѓу потсистемите зависат од моменталната состојба или од надворешни фактори, што доведува до динамички модел од облик:

$$\dot{x}(t) = A(E(t, x))x(t) \quad (2.94)$$

при што матрицата на поврзување се менува со текот на времето. Анализата на стабилноста во вакви услови бара интеграција на структурната и динамичката анализа, што ја надминува рамката на класичната теорија.

Понатаму, во големоразмерни системи се јавуваат колективни феномени како синхронизација, кооперативно однесување и самоорганизација. Овие појави произлегуваат од поврзаноста на голем број динамички единици и бараат употреба на мрежни и спектрални методи за нивна анализа. Во вакви ситуации, класичните модели не обезбедуваат доволна аналитичка прецизност, што ја нагласува потребата од развој на генерализирани теоретски рамки.

Со воведувањето на дескрипторски, нелинеарни и стохастички модели, анализата на динамичките системи се проширува кон поширок концептуален простор кој ги опфаќа и структурните и динамичките аспекти на комплексните мрежи. Овој пристап овозможува поадекватно разбирање на современите динамички процеси и претставува основа за понатамошна анализа на синхронизабилноста и структурно-променливото управување.

Со тоа, секцијата за ограничувања на класичните модели ја заокружува теориската рамка потребна за премин кон следните делови, во кои ќе се разгледуваат спектралната структура и колективните режими на однесување во сложените динамички системи.

2.7 Спектрална структура и колективни режими

Во анализата на динамичките големоразмерни системи, спектралната структура на системската матрица претставува еден од клучните фактори што го определуваат глобалното динамичко однесување. За разлика од системите со мал ред, каде стабилноста може директно да се утврди преку знакот на сопствените вредности, кај меѓуповрзаните системи спектарот ја одразува и тополошката и интеракциската структура на системот [2], [9].

Да се разгледа динамички систем од облик:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.95)$$

каде што $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е системска матрица. Нека λ_k , $k = 1, \dots, n$, се сопствените вредности на матрицата A . Стабилноста на рамнотежната состојба $x^* = 0$ зависи од реалните делови на овие вредности, односно системот е асимптотски стабилен ако важи:

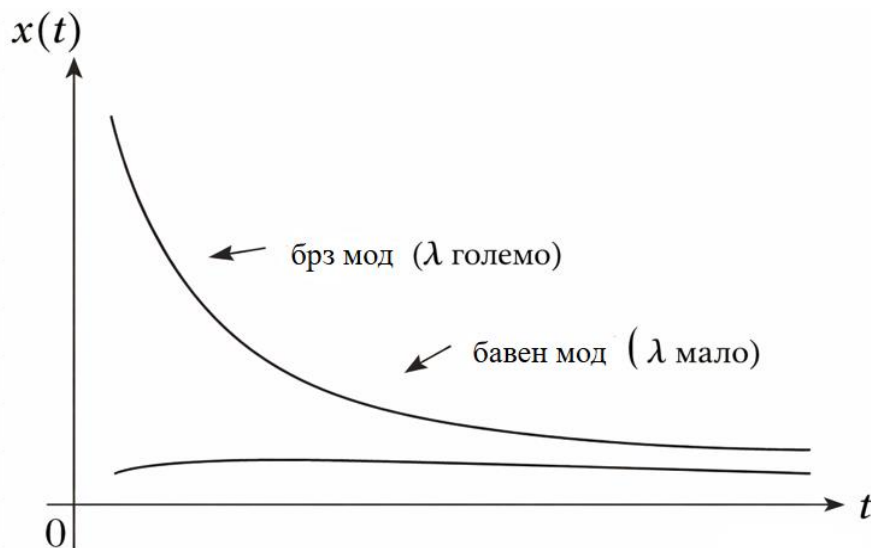
$$\Re(\lambda_k) < 0, k = 1, \dots, n \quad (2.96)$$

Во големоразмерни системи, спектралната анализа овозможува и идентификација на доминантните динамички режими. Ако се означи матрицата на сопствени вектори со V , така што:

$$A = V\Lambda V^{-1}, \quad (2.97)$$

каде што $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, тогаш динамиката може да се декомпонира на независни режими. Ова овозможува анализа на колективното однесување преку поединечни спектрални компоненти.

Динамиката на поединечните режими, кои се карактеризираат со различни брзини на конвергенција, може да се илустрира преку нивната временска еволуција, како што е прикажано на слика 2.6.



Слика бр. 2.6: Илустрација на модална декомпозиција на динамички систем, при што различните спектрални компоненти се карактеризираат со различни брзини на конвергенција

Во мрежните динамички системи, спектралната структура е тесно поврзана со топологијата на поврзувањата. Особено, лапласијанската матрица игра централна улога во дефинирањето на колективните режими, како што е наведено во (2.63). Сопствените вредности на лапласијанската матрица ја определуваат брзината на конвергенција кон синхронизирана состојба и стабилноста на колективната динамика.

Колективните режими на однесување се појавуваат како резултат на поврзувањето на голем број динамички единици. Во такви системи, динамиката не може да се опише исклучиво преку локалните својства на поединечните потсистеми, туку бара анализа на глобалните спектрални својства.

Да се разгледа дифузивен мрежен модел од облик:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \quad (2.98)$$

каде што L е лапласијанска матрица. Во овој случај, спектралната структура на L ја определува динамиката на конвергенцијата кон униформна состојба.

Понатаму, спектралната анализа овозможува дефинирање на колективни режими како синхронизација, осцилации или кластеризација. Ако системот поседува повеќе сопствени вредности со мал реален дел, може да се јават бавни динамички режими кои ја одредуваат долгорочната еволуција на системот.

Во современите истражувања, спектралната структура се користи и за анализа на робусноста на големоразмерни системи. Промените во топологијата на мрежата доведуваат до варијации во спектарот на системската матрица, што има директно влијание врз стабилноста и синхронизацијата.

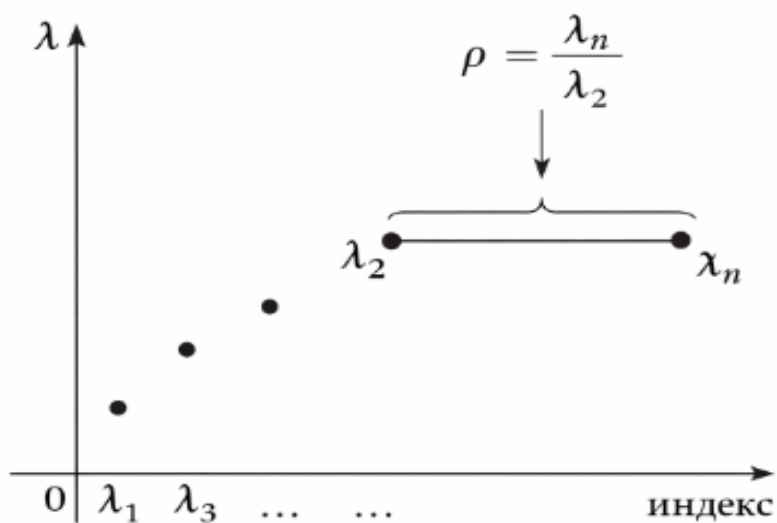
Со тоа, спектралната анализа претставува фундаментална алатка за разбирање на колективните динамички феномени. Таа овозможува поврзување на локалната динамика на потсистемите со глобалното однесување на мрежата и претставува основа за понатамошна анализа на синхронизабилноста и структурно-променливото управување.

Во овој контекст, се овозможува појасно разбирање на условите под кои се појавуваат колективни режими како синхронизација, кластеризација и кооперативно однесување. Притоа, спектралните граници играат централна улога во утврдувањето на стабилноста на синхронизираните состојби.

Да се разгледа дифузивен мрежен систем од обликот (2.98), при што лапласијанската матрица има спектар дефиниран во (2.68). Познато е дека динамиката на синхронизацијата зависи од интервалот на сопствените вредности, односно од односот:

$$\rho = \frac{\lambda_n}{\lambda_2}, \quad (2.99)$$

кој претставува мерка за синхронизабилноста на мрежата. Колку е помала оваа вредност, толку е полесно да се постигне стабилна синхронизација. Спектралната распределба на сопствените вредности и нејзиното влијание врз синхронизабилноста се илустрирани преку слика 2.7:



Слика бр. 2.7: Спектар на лапласијанската матрица, при што односот $\rho = \lambda_n / \lambda_2$ ја определува синхронизабилноста на мрежата.

Во системите со позитивни врски, може да се примени теоремата на Перон–Фробениус (Perron–Frobenius) за анализа на доминантната сопствена вредност на матрицата на поврзување. Нека E е ненегативна матрица, тогаш постои реална позитивна сопствена вредност $\lambda_{\max}$ таква што:

$$\lambda_{\max} = \max_k \Re(\lambda_k(E)), \quad (2.100)$$

која ја определува долгорочната динамика на системот.

Покрај глобалната синхронизација, во многу сложени мрежи се јавуваат и кластерни режими, при што групи на јазли се синхронизираат меѓусебно, но остануваат динамички различни од другите групи. Овој феномен може да се анализира преку спектрална декомпозиција на лапласијанската матрица, при што блок структурата на сопствените вектори ја одразува кластерната организација на мрежата.

Дополнително, спектралната структура овозможува анализа на робусноста на колективните режими. Промените во топологијата на мрежата доведуваат до варијации во сопствените вредности, што може да влијае врз стабилноста на синхронизацијата. Во вакви случаи, се користат спектрални граници кои ја гарантираат стабилноста за дадена класа структурни варијации.

Во насочените мрежи, спектралната анализа се проширува кон разгледување на комплексни сопствени вредности и генерализирани лапласијански матрици. Во овие системи, стабилноста на колективната динамика зависи од реалните делови на сопствените вредности и од геометријата на сопствените подпростори.

Понатаму, спектралната структура овозможува и дефинирање на енергетски индикатори за колективното однесување. Ако се разгледа функција од облик:

$$V(x) = x^T Lx, \quad (2.101)$$

нејзиното намалување укажува на тенденција кон усогласување на состојбите. Овој пристап претставува основа за Љапунова анализа на синхронизацијата.

Во истражувања, спектралните методи се комбинираат со нелинеарни техники за анализа на сложени динамички мрежи. Ова овозможува формулирање на општи критериуми за стабилност и синхронизација, кои се применливи во различни научни и инженерски области.

Со тоа, секцијата за спектрална структура ја заокружува теориската рамка за анализа на колективните режими и претставува премин кон разгледување на синхронизабилноста и децентрализираното управување во динамичките мрежи.

2.8 Предуслови за синхронизабилност

Во динамичките големоразмерни системи, синхронизацијата претставува фундаментален колективен феномен кој произлегува од поврзаноста меѓу голем број меѓусебно поврзани компоненти. Способноста на системот да достигне синхронизирана состојба не зависи исклучиво од локалната динамика на поединечните потсистеми, туку и

од структурните својства на мрежата, спектралната распределба на системските параметри и природата на механизмите на поврзување [5].

Да се разгледа дифузивен мрежен динамички систем од облик:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - Lx(t), \quad (2.102)$$

каде што $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор, $F(\cdot)$ ја опишува локалната динамика на јазлите, а L е лапласијанска матрица на мрежата. Синхронизирана состојба се дефинира со условот:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = \bar{x}(t), \quad (2.103)$$

каде што $\bar{x}(t)$ претставува заедничка траекторија на сите потсистеми.

Основен предуслов за постоење на синхронизација е поврзаноста на мрежата, што во спектрална смисла се формулира преку условот:

$$\lambda_2 > 0 \quad (2.104)$$

каде што λ_2 е алгебарската поврзаност на лапласијанска матрица, како што е наведено во (2.68). Овој услов гарантира дека мрежата нема изолирани компоненти и дека информацијата може да се пренесува меѓу сите јазли.

Дополнително, синхронизабилноста зависи од стабилноста на локалната динамика. Ако се разгледа линеаризацијата на системот (2.102) околу синхронизираната траекторија, се добива варијациски систем од облик:

$$\dot{\xi}(t) = (J(\bar{x}(t)) - \lambda_k I)\xi(t), \quad (2.105)$$

каде што $J(\bar{x}(t))$ е Јакобијановата матрица на функцијата $F(\cdot)$, а λ_k се сопствените вредности на лапласијанска матрица. Стабилноста на овој систем за сите $k \geq 2$ претставува неопходен услов за синхронизација.

Во системите со нелинеарна динамика, анализата на синхронизабилноста често се базира на концептот на функцијата на мастер-стабилност (Master Stability Function) која ја поврзува локалната динамика со спектралната структура на мрежата. Овој пристап овозможува дефинирање на интервали на сопствени вредности во кои синхронизацијата е стабилна.

Покрај спектралните услови, важна улога има и интензитетот на поврзувањата меѓу потсистемите. Ако се воведо параметар на спрегнатост $c > 0$, моделот (2.102) може да се запише во форма:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - cLx(t) \quad (2.106)$$

при што постои критична вредност c^* над која синхронизацијата станува стабилна.

Понатаму, синхронизабилноста зависи и од структурната хомогеност на мрежата. Во хетерогени системи, разликите во локалната динамика можат да доведат до појава на кластерна синхронизација или делумно усогласување.

Во современите истражувања, предусловите за синхронизација се разгледуваат во поширок контекст кој ги опфаќа и стохастичките нарушувања, временски променливите

топологии и нелинеарните интеракции. Овие фактори ја нагласуваат сложеноста на колективните динамички процеси и потребата од интеграција на спектралните и Љапуновите методи.

Со тоа, анализата на предусловите за синхронизабилност претставува клучен чекор кон разбирање на колективното однесување во динамичките мрежи и создава основа за понатамошна разработка на методи за децентрализирано управување и стабилизација.

Продлабочувањето на условите за синхронизација во динамичките мрежи води кон разгледување на робусноста на синхронизираниот режим во присуство на структурни варијации и динамички нарушувања. Во реалните системи, параметрите на поврзувањата и локалната динамика ретко се познати со апсолутна точност, што ја наметнува потребата од формулирање на услови за робусна синхронизабилност.

Да се разгледа модел со нарушувања од облик:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - cLx(t) + d(t), \quad (2.107)$$

каде што $d(t) \in \mathbb{R}^n$ претставува нарушувачки сигнал. Во вакви услови, синхронизацијата се разгледува во смисла на ограниченост на разликата меѓу состојбите на потсистемите, односно:

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \quad (2.108)$$

Анализата на робусната синхронизација често се базира на концептот на функцијата на мастер-стабилност, која ја поврзува локалната динамика со спектралниот опсег на лапласијанската матрица. Ако спектарот на матрицата cL лежи во стабилен интервал на функцијата на мастер-стабилност, тогаш синхронизацијата се одржува и во присуство на нарушувања.

Понатаму, структурната организација на мрежата има значајно влијание врз синхронизабилноста. Во мрежи со висока хомогеност на степените на јазлите, синхронизацијата се постигнува полесно, додека хетерогените структури можат да доведат до појава на повеќе синхронизирани групи. Овој феномен е тесно поврзан со спектралната распределба на лапласијанската матрица и со геометријата на нејзините сопствени подпростори.

Во системите со временски променлива топологија, условите за синхронизација се формулираат преку просечни или униформни спектрални критериуми. Ако мрежата останува поврзана во временски просек, синхронизацијата може да се постигне дури и при динамички промени на поврзувањата.

Дополнително, во нелинеарните мрежни системи синхронизацијата може да се разгледува како резултат на инваријантноста на синхронизираната состојба. Во вакви системи, стабилноста се утврдува преку анализа на трансверзалната динамика и преку Љапуновите методи.

Покрај глобалната синхронизација, во сложените динамички мрежи може да се јави и делумна синхронизација, при што одредени подгрупи на јазли се усогласуваат меѓусебно. Овој феномен е поврзан со блок-структурата на лапласијанската матрица и со спектралната сегментација на мрежата.

Во современите истражувања, предусловите за синхронизабилност се разгледуваат во контекст на интеграција на спектралните методи, нелинеарната анализа и теоријата на комплексни мрежи. Овој интегративен пристап овозможува формулирање на општи критериуми за стабилна синхронизација во големоразмерни системи.

Со тоа, анализата на предусловите за синхронизабилност ја заокружува теориската рамка за разбирање на колективната динамика и претставува основа за понатамошен развој на методи за децентрализирано управување и структурна стабилизација.

2.9 Структурни предуслови и синхронизабилна организација на мрежните динамички системи

Во големоразмерни системи, синхронизацијата не претставува само динамички феномен, туку и структурно својство на мрежната организација. Способноста на системот да достигне синхронизирана состојба зависи од начинот на кој се организирани поврзувањата меѓу поединечните потсистеми, како и од распределбата на динамичките параметри во рамките на мрежата. Овој аспект ја нагласува важноста на структурните предуслови како основа за појава на колективна динамика [4], [5].

Да се разгледа мрежен динамички систем од облик:

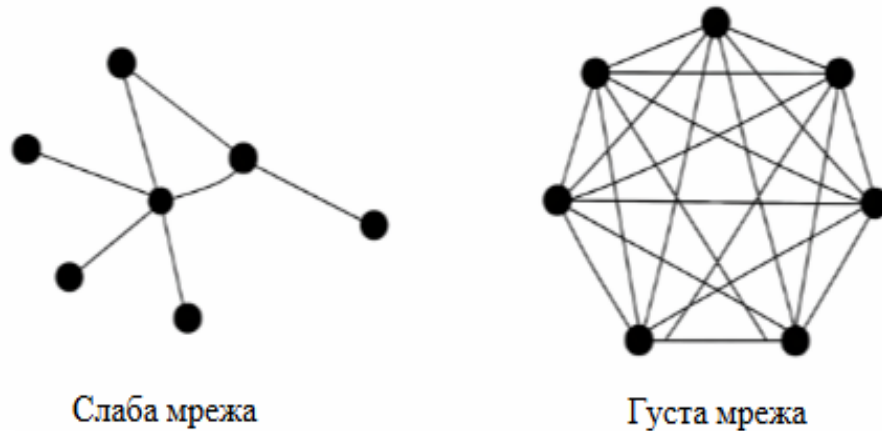
$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - cLx(t), \quad (2.109)$$

каде што $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбен вектор, $F(\cdot)$ ја опишува локалната динамика, $c > 0$ е параметар на спрегнатост, а L е лапласијанската матрица на мрежата. Во оваа формализација, синхронизацијата се јавува како резултат на поврзаноста меѓу локалната динамика и глобалната топологија.

Структурната синхронизабилност на системот може да се дефинира како својство на мрежата да овозможи стабилна синхронизација за дадена класа локални динамички модели. Овој поим ја нагласува улогата на тополошките параметри како што се степенот на поврзаност, хомогеноста на мрежата и спектралната распределба на лапласијанската матрица.

Во густо поврзани мрежи, синхронизацијата може да се постигне со релативно мал интензитет на поврзувањата, бидејќи информацијата се пренесува по повеќе патишта. Во спротивност, во ретко поврзани структури потребен е поголем степен на спрегнатост за да се обезбеди стабилно усогласување на состојбите.

Влијанието на структурната поврзаност врз синхронизацијата може да се илустрира преку различни тополошки конфигурации на мрежата, како што е прикажано на слика 2.8.



Слика бр. 2.8: Влијание на топологијата врз синхронизабилноста: (лево) слабо поврзана мрежа со ограничена способност за синхронизација и (десно) густо поврзана мрежа со подобрена синхронизабилност.

Дополнително, структурната организација влијае врз појавата на колективни режими како кластерна синхронизација или делумна усогласеност. Во такви системи, подгрупи на јазли можат да формираат стабилни синхронизирани структури, што е директно поврзано со спектралната сегментација на мрежата.

Во современите динамички мрежи, структурните предуслови се разгледуваат и во контекст на адаптивни и временски променливи топологии. Во вакви системи, синхронизацијата се јавува како резултат на коеволуција на динамиката и структурата, што претставува значаен предизвик за аналитичките методи.

Со тоа, анализата на структурните предуслови претставува клучна основа за разбирање на синхронизабилната организација на комплексните динамички системи. Оваа анализа создава теоретска рамка за понатамошен развој на методи за структурно-променливо управување и децентрализирана стабилизација.

Продлабочувањето на структурните предуслови за синхронизабилност води кон разгледување на начинот на кој глобалната динамика на системот може да се обликува преку соодветна организација на поврзувањата. Во големоразмерните системи, стабилноста и синхронизацијата не се резултат само на динамичките својства на поединечните потсистеми, туку и на нивната структурна интеграција во рамките на мрежата. Овој аспект ја нагласува важноста на концептот на структурна стабилизабилност, кој претставува способност на системот да постигне стабилна синхронизација преку соодветен избор на поврзувачка структура.

Да се разгледа мрежен динамички систем од облик:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - cLx(t) + u(t), \quad (2.110)$$

каде што $u(t) \in \mathbb{R}^n$ претставува управувачки сигнал кој може да се користи за модификација на структурната динамика. Во оваа формализација, синхронизацијата може да се постигне не само преку природната динамика на системот, туку и преку дизајн на структурно-променливи управувачки стратегии.

Во системите со повеќеслојна организација, синхронизабилноста зависи од поврзувањата меѓу различни нивоа на структурата. Локалните поврзувања можат да создадат стабилни подмрежи, додека глобалните врски ја обезбедуваат координацијата меѓу нив. Овој принцип води кон концептот на хиерархиска синхронизација, при која стабилноста се постигнува преку постепено усогласување на различни структурни нивоа.

Дополнително, структурната синхронизабилност може да се анализира преку спектралната распределба на лапласијанската матрица. Промените во топологијата на мрежата доведуваат до варијации во сопствените вредности, што може да ја подобри или наруши способноста за синхронизација. Во овој контекст, структурниот дизајн на мрежата претставува важна алатка за оптимизација на колективната динамика.

Во адаптивните динамички системи, структурата и динамиката се развиваат паралелно, што доведува до појава на коеволутивни процеси. Во такви услови, синхронизацијата може да се разгледува како стабилна атрактивна состојба на заедничкиот структурно-динамички простор. Овој пристап ја нагласува интеграцијата на структурната анализа со теоријата на стабилност.

Понатаму, во системите со структурни нарушувања, синхронизабилноста се разгледува во робусна смисла, односно како способност на системот да ја задржи синхронизираната состојба и при промени во меѓуповрзувачката конфигурација. Ова води кон формулирање на услови за структурна робусност, кои се тесно поврзани со спектралните граници на лапласијанската матрица.

Со тоа, анализата на структурните предуслови ја заокружува теориската рамка за синхронизабилната организација на динамичките големоразмерни системи. Овој концептуален пристап создава основа за понатамошно разгледување на структурно-променливото управување и децентрализираната стабилизација, кои ќе бидат предмет на следните поглавја.

2.10 Синтетичка рамка и интегративна формулација на мрежните динамички системи

Во анализата на динамичките големоразмерни системи, претходните секции ја нагласија потребата од интеграција на различни теоретски пристапи со цел адекватно опишување на сложените колективни процеси. Класичната состојбена формализација, спектралната анализа, мрежната структура и концептите на синхронизација и робусност претставуваат комплементарни аспекти на единствена аналитичка рамка. Оваа интеграција овозможува формулирање на унифициран пристап кон анализата и управувањето на комплексните динамички системи [6], [8].

Да се разгледа генерализиран мрежен динамички систем од облик:

$$E\dot{x}(t) = F(x(t)) - cLx(t), \quad (2.111)$$

каде што $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е дескрипторска матрица, $F(\cdot)$ ја опишува локалната динамика, L е лапласијанска матрица, а $c > 0$ е параметар на спрегнатост. Овој модел ги интегрира основните елементи на современата теорија на мрежни динамички системи.

Интегративната формулација овозможува поврзување на структурните и динамичките аспекти на системот во единствен аналитички контекст. Во ваква рамка, стабилноста, синхронизацијата и робусноста се разгледуваат како меѓусебно зависни својства, кои произлегуваат од поврзаноста на локалната динамика и глобалната топологија.

Дополнително, интегративниот пристап овозможува анализа на системите со временски променлива структура, нелинеарни врски и стохастички нарушувања. Во вакви услови, динамичките процеси се разгледуваат во проширен простор на состојби и параметри, што бара употреба на комбинирани аналитички методи.

Во истражувања, ваквата синтетичка рамка претставува основа за развој на нови методи за децентрализирано управување, структурна оптимизација и стабилизација на комплексни динамички мрежи. Таа овозможува систематско поврзување на теоријата на динамичките системи со теоријата на графови и спектралните методи.

Со тоа, интегративната формулација ја заокружува теоретската основа поставена во ова поглавје и создава концептуална основа за понатамошната анализа на синхронизацијата, структурно-променливото управување и динамичките графови.

Продлабочувањето на интегративната формулација на мрежните динамички системи овозможува појасно разбирање на меѓусебната зависност меѓу структурните својства на мрежата и динамичкото однесување на системот. Во рамките на ваквиот пристап, стабилноста, синхронизацијата и робусноста не се разгледуваат како изолирани феномени, туку како различни аспекти на единствен колективен динамички процес. Овој концептуален поглед ја нагласува потребата од унифицирана теоретска рамка која ги интегрира спектралните, структурните и нелинеарните методи на анализа.

Во општата формализација на мрежните динамички системи, динамиката може да се претстави во облик:

$$E\dot{x}(t) = F(x(t), t) - cL(t)x(t), \quad (2.112)$$

каде што E е дескрипторска матрица, $F(\cdot)$ ја опишува локалната нелинеарна динамика, $L(t)$ е временски променлива лапласијанска матрица, а параметарот c ја карактеризира јачината на поврзувањата. Оваа формулација ја опфаќа пошироката класа на динамички процеси кои се појавуваат во современите технички и природни системи.

Интегративниот пристап овозможува разгледување на структурната разновидност, во проширената стабилност, при што анализата на трансверзалната стабилност, игра централна улога во определувањето на способноста на системот да ја задржи синхронизираната состојба при структурни и параметарски варијации. Овој аспект претставува основа за развој на методи за робусна синхронизација и структурно-променливо управување.

Понатаму, синтетичката рамка овозможува интеграција на мрежната топологија со динамичката еволуција на системот. Во адаптивните мрежи, структурата и динамиката се развиваат коеволутивно, што води кон појава на комплексни колективни режими кои не

можат да се анализираат со класичните методи. Овој феномен ја нагласува суштинската улога на спектралната анализа и теоријата на динамичките графови.

Во големоразмерните системи, интегративниот пристап претставува основа за дизајн на децентрализирани управувачки стратегии, при што глобалното однесување произлегува од локалните интеракции на потсистемите. Во такви услови, стабилноста, синхронизацијата и робусноста се интерпретираат како меѓусебно поврзани својства на единствен колективен динамички процес.

Во целина, анализата претставена во ова поглавје обезбедува кохерентна теоретска рамка за проучување на големоразмерни мрежни динамички системи, во која лапласијанската структура и нејзините спектрални својства претставуваат клучен механизам за поврзување на локалната динамика со глобалната топологија. Со тоа, се воспоставува цврста основа за понатамошна разработка на синхронизабилноста, динамичките графови и структурно-променливото управување, кои се предмет на следните поглавја.

Во таа насока, воспоставената интегративна рамка претставува основа и за формулирање на интегративно-надзорни управувачки механизми, во духот на пристапот на Шилјак, кои овозможуваат координирано управување со сложени меѓуповрзани системи преку комбинација на локални и глобални информации.

Со тоа, ова поглавје ја заокружува теоретската основа потребна за премин кон подетална анализа на структурните и динамичките карактеристики на мрежите од меѓуповрзани системи. Во следното поглавје, вниманието ќе биде насочено кон формализација и анализа на мрежните структури, нивната тополошка организација и механизмите на интеракција меѓу потсистемите, што претставува неопходен чекор кон подлабоко разбирање на синхронизабилноста и колективното однесување на комплексните динамички системи.

2.11 Литература

- [1] L. Bakule, “Decentralized control: An overview,” *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 87–98, 2008.
- [2] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*. Providence, RI, USA: AMS, 1997.
- [3] L. Dai, *Singular Control Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [4] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 2109–2112, 1998.
- [6] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [7] D. D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems*. Boston, MA, USA: Academic Press, 1991.
- [8] D. D. Šiljak and A. Zečević, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback,” *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, pp. 169–179, 2005.
- [9] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.

ГЛАВА 3

Мрежни структури од повисок ред и нивна динамика

По разгледувањето на класичните и генерализираните модели на меѓуповрзани динамички системи во претходното поглавје, природен продолжеток претставува проширување на анализата кон поопшти структурни рамки кои овозможуваат опишување на повеќеслојни и хетерогени врски. Во теоријата на сложени динамички системи, класичните модели на меѓуповрзани структури постепено се покажуваат како недоволни за опис на реалните распределени процеси кои се одвиваат во повеќеслојни и функционално хетерогени средини. Развојот на комплексни технички и природни системи доведе до потреба од формализирање на структури кај кои динамиката не е ограничена на единствена тополошка рамка, туку се формира како резултат на меѓусебните влијанија помеѓу повеќе мрежни нивоа со различна функционална улога [3], [5], [6].

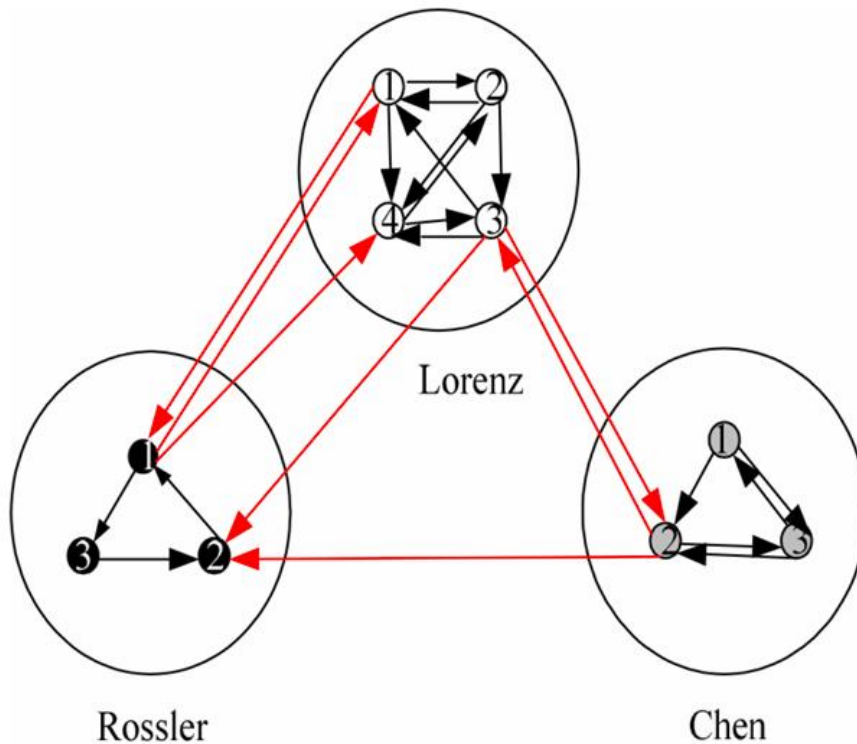
Во такви услови се воведува концептот на мултимрежни динамички системи, односно мрежи составени од повеќе меѓусебно поврзани мрежни слоеви. Секој од овие слоеви може да се разгледува како автономен динамички потсистем со сопствена структурна организација, додека глобалното однесување на целокупниот систем произлегува од нивната колективна поврзаност. Овој пристап претставува природна генерализација на класичните модели на мрежните системи и овозможува поадекватен опис на сложените динамички процеси кои се јавуваат во современите инженерски и природни инфраструктури [1], [13].

Од структурна перспектива, мултимрежните системи се карактеризираат со постоење на повеќе нивоа на поврзување, при што секое ниво може да се опише преку соодветно претставување со граф. Нека поединечен мрежен слој се претстави со граф:

$$\mathcal{G}_k = (\mathcal{V}_k, \mathcal{E}_k), k = 1, 2, \dots, M,$$

каде $\mathcal{V}_k$ го означува множеството на јазли во слојот k , а $\mathcal{E}_k$ множеството на внатрешни врски. Меѓуслојните врски се формализираат преку дополнителни множества на врски кои ги поврзуваат јазлите од различни слоеви, при што се добива проширена структурна рамка која ја интегрира целокупната мултимрежна организација [2], [4].

Во ваквата формулација, глобалната динамика не претставува проста суперпозиција на локалните процеси, туку резултат на сложена размена на динамички информации помеѓу различните структурни нивоа. Меѓуслојните врски имаат суштинска улога во формирањето на колективните режими на однесување, бидејќи тие овозможуваат пренос на динамички влијанија и координација на процесите кои се одвиваат во различни делови на системот [9], [10]. Концептуалната структура на мултимрежен динамички систем е илустрирана на слика 3.1.



Слика бр. 3.1: Структурна организација на мултимрежен динамички систем со повеќеслојни врски помеѓу автономни динамички потсистеми [15].

Илустрираната конфигурација ја нагласува суштинската карактеристика на мултимрежните системи, односно постоење на повеќе функционално различни динамички слоеви кои се поврзани преку меѓуслојни врски. Во вакви структури, локалните динамички процеси во рамките на поединечните слоеви можат да предизвикаат глобални ефекти врз целокупното однесување на системот. Оваа појава е особено значајна кај големоразмерни системи, каде структурната организација и динамичката еволуција се тесно поврзани.

Мултимрежниот пристап овозможува поадекватно моделирање на системи како што се интелигентни енергетски инфраструктури, комуникациски мрежи, транспортни системи и биолошки структури, каде глобалната динамика произлегува од поврзаноста помеѓу локалните нелинеарни процеси и структурната организација на поврзувањето. Овој концепт создава теоретска основа за понатамошна анализа на колективните динамички феномени, особено во контекст на синхронизацијата и стабилноста на големоразмерни системи [5], [6], [8].

На тој начин, воведувањето на мултимрежната перспектива претставува суштински чекор кон развој на интегрирана теорија на мрежни динамички системи, во која структурната комплексност и динамичката еволуција, се разгледуваат како меѓусебно поврзани аспекти на единствен системски процес [15].

3.1 Математички модел на мултимрежни динамички системи

Формалното математичко моделирање на мултимрежните динамички системи се базира на претставување на секој мрежен слој како состав од динамички јазли кои се меѓусебно поврзани преку внатрешни и меѓуслојни врски. Во рамките на ваквиот пристап, мултимрежниот систем се разгледува како интегрирана динамичка структура составена од повеќе потсистеми, при што глобалната динамика произлегува од нивната колективна поврзаност [3], [5], [6].

Нека мултимрежниот систем се состои од M динамички слоеви, при што секој слој $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ содржи N_k јазли. Состојбата на i -тиот јазол во k -тиот слој се означува со векторот:

$$x_i^{(k)}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

каде $t \geq 0$ е временската променлива, а n ја означува димензијата на состојбениот простор. Локалната динамика на јазолот се опишува преку нелинеарна функција:

$$\dot{x}_i^{(k)}(t) = f_k(x_i^{(k)}(t)), \quad (3.2)$$

каде $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ја претставува динамиката на поединечниот слој [7], [13].

Внатрешните врски помеѓу јазлите во рамките на истиот слој се моделираат преку матрица на поврзување:

$$A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k} \quad (3.3)$$

при што елементот $a_{ij}^{(k)} \geq 0$ ја определува јачината на поврзаноста помеѓу јазлите i и j во слојот k . Со воведување на матрица на внатрешно спрегнување $\Gamma_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, внатрешната динамика на поврзување може да се изрази во облик [4], [6]:

$$\sum_{j=1}^{N_k} a_{ij}^{(k)} \Gamma_k (x_j^{(k)}(t) - x_i^{(k)}(t)) \quad (3.4)$$

Покрај внатрешните врски, мултимрежниот систем содржи и меѓуслојни врски кои ги поврзуваат јазлите од различни динамички слоеви. Нека матрицата:

$$B^{(k\ell)} = [b_{ij}^{(k\ell)}] \in \mathbb{R}^{N_k \times N_\ell} \quad (3.5)$$

ја опишува структурата на поврзаност помеѓу k -тиот и ℓ -тиот слој, каде $b_{ij}^{(k\ell)} \geq 0$ ја претставува јачината на меѓуслојната поврзаност. Со воведување на матрица на меѓуслојно спрегнување $\Gamma_{k\ell} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, меѓуслојниот динамички член се изразува како [1]:

$$\sum_{\ell \neq k} \sum_{j=1}^{N_\ell} b_{ij}^{(k\ell)} \Gamma_{k\ell} (x_j^{(\ell)}(t) - x_i^{(k)}(t)). \quad (3.6)$$

Комбинирајќи ги локалната динамика и структурните врски, се добива општата динамичка равенка на i -тиот јазол во k -тиот слој [2], [13]:

$$\dot{x}_i^{(k)}(t) = f_k(x_i^{(k)}(t)) + \sum_{j=1}^{N_k} a_{ij}^{(k)} \Gamma_k(x_j^{(k)}(t) - x_i^{(k)}(t)) + \sum_{\ell \neq k} \sum_{j=1}^{N_\ell} b_{ij}^{(k\ell)} \Gamma_{k\ell}(x_j^{(\ell)}(t) - x_i^{(k)}(t)). \quad (3.7)$$

Од системска перспектива, мултимрежниот динамички систем може да се претстави и во компактен облик преку агрегирање на сите состојбени вектори во глобален состојбен вектор:

$$X(t) = \text{col}(x_1^{(1)}(t), \dots, x_{N_1}^{(1)}(t), x_1^{(2)}(t), \dots, x_{N_M}^{(M)}(t)), \quad (3.8)$$

што овозможува формулирање на системот како големоразмерна динамичка структура со проширена матрична репрезентација. Ваквата компактна формулација претставува основа за понатамошна анализа на структурните и динамичките својства на мултимрежните системи [15].

Ваквата формулација претставува суштинска основа за понатамошна анализа на колективните динамички феномени кај мултимрежните системи. Особено значајно е тоа што моделот природно доведува до проучување на синхронизирани режими на движење, бидејќи внатрешните и надворешните врски ја определуваат можноста за усогласување на динамиката на поединечните потсистеми [2], [9], [10].

Дополнително, блок структурната репрезентација на мултимрежниот систем овозможува формализирање на структурните варијации и нарушувања во поврзаноста, што претставува основа за развој на методи за структурно-променливо управување. На тој начин, математичкиот модел воспоставен во ова поглавје создава теоретска рамка која ќе биде искористена во понатамошната разработка на децентрализиран и интегративни управувачки стратегии [14].

Во контекст на интегративниот надзорен управувачки пристап, глобалниот состојбен опис на мултимрежниот систем овозможува формулирање на координирани управувачки механизми кои ја интегрираат информацијата од повеќе структурни нивоа. Оттука, предложената математичка формулација претставува обединувачка основа за анализата на синхронизацијата, структурната динамика и управувањето кај сложени мрежни динамички системи [5], [15].

3.2 Моделирање на структурни варијации и нарушувања во мултимрежни динамички системи

Во реалните големоразмерни динамички системи, структурната организација на мрежните интеракции ретко останува статична. Промените во топологијата, појавата на дефекти во комуникациските канали, деградацијата на физичките врски или динамичката реконфигурација на системските компоненти доведуваат до временски зависни варијации во структурните параметри. Во контекст на мултимрежните системи, ваквите појави имаат

особено значајно влијание врз колективната динамика и стабилноста, бидејќи нарушувањето на поединечни врски може да предизвика глобални ефекти врз целокупното однесување на системот [1], [14].

Нека внатрешната матрица на поврзување во k -тиот мрежен слој се разгледува како временски зависна функција:

$$A^{(k)}(t) = A^{(k)} + \Delta A^{(k)}(t), \quad (3.9)$$

каде $A^{(k)}$ ја означува номиналната структурна матрица, а $\Delta A^{(k)}(t)$ ја претставува временската варијација која произлегува од варијации или структурни нарушувања. Аналогно, меѓуслојната матрица на поврзување се моделира како:

$$B^{(k\ell)}(t) = B^{(k\ell)} + \Delta B^{(k\ell)}(t), \quad (3.10)$$

при што $\Delta B^{(k\ell)}(t)$ ја опишува динамичката промена на врските помеѓу слоевите k и ℓ .

Со воведување на овие варијации, динамичката равенка на мултимрежниот систем добива проширена форма:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{(k)}(t) = & f_k(x_i^{(k)}(t)) + \sum_{j=1}^{N_k} (a_{ij}^{(k)} + \Delta a_{ij}^{(k)}(t)) \Gamma_k(x_j^{(k)} - x_i^{(k)}) + \\ & + \sum_{\ell \neq k} \sum_{j=1}^{N_\ell} (b_{ij}^{(k\ell)} + \Delta b_{ij}^{(k\ell)}(t)) \Gamma_{k\ell}(x_j^{(\ell)} - x_i^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Овој модел овозможува формализирање на различни типови структурни нарушувања, вклучувајќи прекин на врски ($\Delta a_{ij} = -a_{ij}$), појава на нови врски, варијација на тежини и временски зависна топологија [1].

Од системска перспектива, структурните варијации можат да се интерпретираат како параметарски нарушувања во проширениот состојбен простор. Со агрегирање на состојбените вектори како во (3.8), мултимрежниот систем со нарушувања може да се претстави во компактен облик:

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + (\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}(t))X(t), \quad (3.12)$$

каде $\mathcal{L}$ претставува проширена лапласијанска матрица на мултимрежниот систем, а $\Delta \mathcal{L}(t)$ ја опишува временската варијација на структурната поврзаност [15].

Воведувањето на временски зависни структурни нарушувања има суштинско значење за анализа на синхронизабилноста на мултимрежните системи. Во присуство на нарушувања, стабилноста на синхронизираниот режим зависи не само од локалната динамика на јазлите, туку и од спектралните својства на варијабилната лапласијанска структура. Оваа зависност создава теоретска основа за развој на методи за робусна синхронизација и анализа на далекусежни ефекти во мрежните динамички системи [2], [3], [5].

Дополнително, структурните варијации претставуваат природен предуслов за формулирање на концептот на структурно-променливо управување. Во таков контекст, контролниот механизам се синтетизира со цел да компензира или стабилизира нарушувања во топологијата, што овозможува одржување на стабилното функционирање на системот дури и во услови на динамичка реконфигурација [14].

Од аспект на интегративниот надзорен управувачки пристап, моделот со структурни нарушувања овозможува дефинирање на надредени управувачки слоеви кои вршат мониторинг и адаптација на структурната конфигурација на системот. На тој начин, мултимрежниот систем се трансформира во хиерархиски организирана динамичка структура во која локалната динамика, мрежната топологија и управувачките механизми се разгледуваат како меѓусебно зависни компоненти на единствен интегрален процес [6].

Со тоа, формализацијата на структурните варијации и нарушувања во мултимрежните системи претставува суштински чекор кон развој на унифицирана теорија на робусна синхронизација, структурно-променливо управување и интегративни управувачки стратегии кај сложени мрежни динамички системи.

3.3 Системска интерпретација на мултимрежните динамички структури

Мултимрежните динамички системи претставуваат проширена класа на големоразмерните системи во кои структурната организација и динамичката еволуција се неразделно поврзани. За разлика од класичните модели на мрежни системи, кај мултимрежните структури, динамиката се формира како резултат на поврзаноста помеѓу повеќе функционално различни мрежни слоеви, што доведува до појава на сложени колективни режими на однесување. Во таков контекст, системската интерпретација на мултимрежните структури овозможува интегрирано разгледување на тополошките, динамичките и управувачките аспекти на анализираниот систем [15].

Од системска перспектива, мултимрежниот динамички систем може да се интерпретира како хиерархиски организирана структура составена од повеќе нивоа на поврзување. На најниско ниво се наоѓа локалната динамика на поединечните јазли, која ја определува нивната автономна еволуција во времето. На повисоко ниво се разгледуваат внатрешните врски во рамките на поединечните мрежни слоеви, кои овозможуваат формирање на локални колективни режими. На највисоко структурно ниво се појавуваат меѓуслојните врски, кои ја дефинираат глобалната динамика на мултимрежниот систем [6].

Во ваквата хиерархиска поставеност, структурните варијации и нарушувањата во поврзувањето можат да се интерпретираат како нарушувања кои се пренесуваат низ различните нивоа на системската организација. Нарушувањето на поединечна врска може да предизвика локални динамички промени, кои понатаму се рефлектираат врз глобалната стабилност и синхронизација на системот. Оваа појава ја нагласува суштинската улога на структурната топологија како посредник помеѓу локалната динамика и колективното однесување.

Системската интерпретација на мултимрежните структури создава природна основа за воведување на концептот на синхронизабилност како колективно својство на системот. Во ваква рамка, синхронизацијата не се разгледува како изолирана динамичка појава, туку како резултат на поврзаноста помеѓу локалните динамички механизми и глобалната структурна конфигурација. Оваа перспектива овозможува формулирање на спектрални предуслови за постоење и стабилност на синхронизирани режими на движење [2], [3].

Дополнително, системската интерпретација на мултимрежните динамички системи претставува теоретска основа за развој на концептот на динамички графови, во кои структурната топологија се разгледува како временски променлива функција. Во таков контекст, динамичките графови овозможуваат формализирање на структурните трансформации на системот и анализа на нивното влијание врз колективната динамика [15].

Од аспект на управувањето, мултимрежните структури можат да се интерпретираат како системи со распределена и хиерархиска контрола, во кои локалните управувачки механизми се интегрираат во надредени управувачки слоеви. Ваквата организација претставува природна основа за развој на методи за структурно-променливо управување и интегративни надзорни управувачки стратегии, кои имаат за цел стабилизација на системот во услови на структурна динамика и нарушувања.

Со тоа, системската интерпретација на мултимрежните динамички структури претставува клучен чекор кон унифицирано разгледување на синхронизацијата, структурната анализа и управувањето кај сложени мрежни системи. Овој пристап создава теоретска врска помеѓу моделите на мултимрежна динамика, спектралната анализа на топологијата и синтезата на современи управувачки механизми, што претставува основа за понатамошните истражувања разгледани во следните поглавја [14].

3.4 Заклучни согледувања

Во ова поглавје беше разгледан концептот на мултимрежни динамички системи како природно проширување на класичните модели на меѓуповрзани и мрежни структури. Преку воведување на повеќеслојна структурна формализација беше покажано дека современите сложени системи не можат адекватно да се опишат со единствена тополошка рамка, туку нивното динамичко однесување произлегува од заемната на поврзување на повеќе функционално различни мрежни нивоа. На тој начин се воспоставува системска перспектива во која локалната динамика и глобалната организација на поврзувањето се разгледуваат како меѓусебно зависни аспекти на единствен динамички процес [3], [5].

Математичката репрезентација на мултимрежните структури, заснована врз проширени граф-модел и блок-матрични формализации, овозможува интегрирано опишување на внатрешните и меѓуслојните врски. Ваквиот пристап ја нагласува улогата на тополошката организација како суштински фактор во определувањето на глобалните динамички својства и овозможува системско разгледување на колективните режими кои произлегуваат од поврзаноста на повеќе структурни нивоа. Особено значајно е тоа што мултимрежната перспектива овозможува формализирање на хетерогеноста на поврзувањето, што е карактеристично за голем број технички, природни и социотехнички системи.

Разгледувањето на структурните варијации и можните нарушувања во поврзувањето придонесува за подлабоко разбирање на динамиката на распределените системи во услови на неизвесност и временска променливост на топологијата. Овие аспекти ја истакнуваат потребата од аналитички рамки кои ја земаат предвид робусноста и динамичката сигурност како фундаментални својства на мултимрежните структури. Во таква рамка, стабилноста и координацијата на колективното однесување не се определуваат исклучиво од локалните динамички механизми, туку од нивната поврзаност со глобалната структурна конфигурација [14].

Со воспоставување на мултимрежната динамичка перспектива, ова поглавје создава концептуална и математичка основа за понатамошно продлабочување на теоријата на сложени меѓуповрзани системи. Особено значајно е тоа што анализата на повеќеслојната структурна организација природно води кон прашањето за условите под кои ваквите системи можат да развијат координирани колективни режими на движење. Во тој контекст, синхронизацијата се појавува како фундаментално својство на мрежните динамички структури, чија појава и стабилност се условени од взаемното дејство на локалната динамика и глобалната топологија на поврзувањето [2].

Оттука, проучувањето на синхронизабилноста претставува логичен и неопходен следен чекор во развојот на системската теорија на сложени мрежни динамички системи, бидејќи овозможува формализирање на колективните режими на однесување како резултат на структурно-динамичката организација. Оваа перспектива создава теоретска основа за понатамошната анализа на условите за појава, стабилност и управување на синхронизирани режими, што претставува централна тема на следното поглавје.

3.5 Литература

- [1] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.
- [2] G. Chen and X. Dong, *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications*, Singapore: World Scientific, 1998.
- [3] F. Dörfler and F. Bullo, “Synchronization in complex oscillator networks: A survey,” *Automatica*, vol. 50, no. 6, pp. 1539–1564, 2014.
- [4] J. Fax and R. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.
- [5] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*, Boston: Birkhäuser, 2003.
- [6] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, New York: Springer, 1993.
- [7] Z. Li, Z. Duan, G. Chen and L. Huang, “Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 57, no. 1, pp. 213–224, 2010.
- [8] L. Moreau, “Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [9] H. Nijmeijer and I. Mareels, “An observer looks at synchronization,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997.

- [10] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [11] R. Olfati-Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401–420, 2006.
- [12] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Master stability functions for synchronized coupled systems," *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, pp. 2109–2112, 1998.
- [13] A. Pogromsky and H. Nijmeijer, "Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 48, no. 2, pp. 152–162, 2001.
- [14] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, London: Springer, 2008.
- [15] T. Ren, S. Sun, G. Dimirovski and R. Wang, "Synchronization of multi-network systems with two types of inter-network coupling faults," *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 12, pp. 1698–1708, 2020.
- [16] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*, New York: North-Holland, 1978.
- [17] F. Xiao and L. Wang, "Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 44, no. 10, pp. 2577–2582, 2008.
- [18] W. Yu, G. Chen and M. Cao, "Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems," *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1089–1095, 2010.
- [19] G. Zhai, B. Hu and K. Yasuda, "Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 329–332, 2001.
- [20] J. Lü and G. Chen, "A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 6, pp. 841–846, 2005.

ГЛАВА 4

Синхронизабилност кај мрежни меѓуповрзани сложени динамички системи

Анализа на сложените мрежни динамички системи неизбежно води кон разгледување на колективните режими на однесување кои произлегуваат од нивната структурна организација и динамичка поврзаност. Во системите составени од голем број меѓусебно поврзани динамички единици, локалните процеси не можат да се разгледуваат изолирано, бидејќи нивната еволуција е суштински условена од топологијата на поврзувањето и од начинот на пренос на влијанија низ мрежната структура. Оттука, глобалното динамичко однесување се формира како резултат на заемното дејство на повеќе структурни и динамички фактори, при што колективните режими претставуваат фундаментален аспект на системската динамика [1], [3], [18].

Во рамките на овие колективни феномени, синхронизацијата се издвојува како еден од најзначајните процеси на динамичка координација. Таа се манифестира како усогласување на временската еволуција на поединечните потсистеми, при што системот развива организирано однесување кое не може да се објасни само преку локалните својства на неговите компоненти. Ова укажува дека синхронизацијата претставува системска појава чија природа и стабилност се одредени од интегралната поврзаноста помеѓу локалната динамика и глобалната структурна конфигурација [13], [11].

Во контекст на мрежни системи, поимот синхронизабилност се однесува на способноста на системот да развие и одржи синхронизиран режим на движење под дадени структурни и динамички услови. Овој поим ја надминува класичната концепција на стабилност на поединечни динамички единици и ја воведува потребата од системска анализа која ја зема предвид улогата на топологијата, распределената поврзаност и можната хетерогеност на динамичките процеси. Во таква рамка, синхронизацијата се појавува како резултат на стабилизација на одредена инваријантна структура во просторот на состојби, која ја опишува усогласената еволуција на системот како целина [6], [7].

Развојот на теоријата на синхронизабилност кај мрежните динамички системи претставува природно продолжение на современите истражувања во областа на комплексните системи и распределеното управување. Анализата на условите под кои се појавува синхронизацијата овозможува подлабоко разбирање на улогата на структурната организација во формирањето на колективното динамичко однесување. Воедно, таа создава основа за синтеза на управувачки стратегии кои овозможуваат контролирано постигнување и одржување на синхронизирани режими, што е од суштинско значење за голем број инженерски, природни и технолошки системи.

Во ова поглавје се разгледуваат фундаменталните теоретски аспекти на синхронизабилноста кај мрежните меѓуповрзани динамички системи. Посебно внимание се посветува на условите за појава и стабилност на синхронизираниите режими, како и на улогата на структурната топологија во определувањето на колективната динамика. На тој начин се воспоставува аналитичка рамка која овозможува системско разгледување на синхронизацијата како клучен феномен во теоријата на сложени динамички системи.

4.1 Премин од мрежна динамика кон синхронизабилност

Анализата на мрежите од меѓусебно поврзани сложени динамички системи, разгледана во претходното поглавје, природно води кон проучување на механизмите на колективно однесување кои произлегуваат од нивната структурна и динамичка поврзаност. Во вакви системи, поединечните потсистеми не функционираат изолирано, туку нивната еволуција е резултат на заемно влијание кое се реализира преку топологијата на мрежата. Оваа интеракција може да доведе до појава на организирани динамички режими, меѓу кои синхронизацијата претставува еден од најзначајните феномени.

Синхронизацијата кај мрежните системи се појавува како резултат на стабилизација на одредена инваријантна разновидност во просторот на состојби, која ја опишува усогласената еволуција на динамичките единици. Во оваа смисла, синхронизабилноста не е само локално својство на поединечен потсистем, туку системска карактеристика која произлегува од взаемното дејство на локалната динамика и глобалната тополошка структура. Оттука, анализата на условите за синхронизација бара интегриран пристап кој ги обединува теоријата на динамички системи и теоријата на графови.

Во општата формулација, динамиката на N меѓусебно поврзани потсистеми може да се опише со равенката:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad (4.1)$$

каде $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ја означува состојбата на i -тиот потсистем, $f(\cdot)$ ја претставува локалната нелинеарна динамика, a_{ij} се елементи на матрицата на поврзаност, а $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е матрица која ја дефинира структурата на динамичката поврзаност [13], [9].

Синхронизираната траекторија се дефинира како решение $s(t)$ кое ја задоволува автономната динамика:

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (4.2)$$

при што системот се смета за синхронизиран доколку состојбите на сите потсистеми конвергираат кон оваа траекторија, односно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Оваа постановка овозможува проблемот на синхронизабилност да се разгледува како проблем на стабилност на трансверзалната динамика, што претставува основа за понатамошна спектрална анализа. Во таа насока, синхронизацијата се јавува како мост

помеѓу локалната динамика и глобалната структура на мрежата, при што тополошките својства играат клучна улога во определувањето на доменот на стабилно колективно однесување [1], [20].

Таквата аналитичка рамка овозможува природно проширување на класичните резултати кон поопшти класи на мрежните динамички системи, вклучително и мултимрежни структури и временски променливи топологии. Во таа насока, понатамошната анализа ќе биде насочена кон систематско разгледување на условите за појава и стабилност на синхронизираните режими во сложени меѓуповрзани динамички системи, при што структурните и динамичките аспекти ќе се третираат како интегрални компоненти на единствен теоретски проблем.

4.2 Основен модел на синхронизација кај сложени мрежи

Формулацијата на синхронизацијата како стабилност на инваријантна разновидност овозможува систематско разгледување на условите под кои се постигнува колективно координирано однесување кај мрежните динамички системи. Во рамките на класичната теорија, врските помеѓу поединечните потсистеми се опишуваат преку лапласијанската матрица која ја инкапсулира тополошката структура на мрежата и претставува клучен оператор во анализата на синхронизабилност.

Нека се разгледа мрежа составена од N идентични динамички единици, при што матрицата на поврзаност $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ја опишува структурата на врските. Со воведување на дијагоналната матрица на степени $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$, каде $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, лапласијанската матрица се дефинира како [12], [19]:

$$L = D - A \quad (4.4)$$

Во агрегирана форма, динамиката на целиот систем може да се запише како:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - (L \otimes \Gamma)x(t), \quad (4.5)$$

каде $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^{nN}$, $F(x) = \text{col}(f(x_1), \dots, f(x_N))$. Оваа формулација ја истакнува улогата на лапласијанската структура како посредник помеѓу локалната динамика и глобалното колективно однесување [13], [18].

Синхронизираната состојба е инваријантна за системот (4.5) поради фактот што лапласијанската матрица има нулта сопствена вредност со сопствен вектор $\mathbf{1}$, што ја одразува симетријата на поврзувањето. Анализата на стабилноста на синхронизираната разновидност се сведува на разгледување на трансверзалната динамика, која се определува од спектралните својства на матрицата L и од локалната динамика дефинирана со функцијата $f(\cdot)$.

Во оваа рамка, проблемот на синхронизабилност се трансформира во анализа на стабилноста на нултата состојба на соодветен систем на грешка, што овозможува примена на спектрални методи и Љапуновата теоријата за утврдување на доволни услови за постигнување синхронизација. Ваквата формулација претставува основа за проширување

кон поопшти класи на системи, вклучително и мултимрежни структури и временски променливи топологии, кои ќе бидат разгледани во продолжение.

4.3 Спектрални предуслови за синхронизабилност

Во рамките на моделот (4.5), синхронизабилноста на мрежниот динамички систем е тесно поврзана со спектралните својства на Лапласовата матрица L , која ја рефлектира тополошката структура на поврзувањето. Анализата на стабилноста на синхронизираната состојба се заснова на декомпозиција на динамиката во режими кои одговараат на сопствените вредности на оваа матрица, со што се добива појасна врска помеѓу локалната динамика и глобалната структура на мрежата [11], [16].

Нека $\lambda_k, k = 1, \dots, N$, ги означуваат сопствените вредности на лапласијанската матрица L , при што важи:

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N. \quad (4.6)$$

Нултата сопствена вредност λ_1 ја определува синхронизираната разновидност, додека останатите сопствени вредности ја карактеризираат трансверзалната динамика. Особено значајна е алгебарската поврзаност на мрежата, дефинирана со λ_2 , која претставува мерка за структурната интегрираност и има директно влијание врз условите за постигнување стабилна синхронизација.

Со трансформација во сопствен базис на матрицата L , системот (4.5) може да се разложи на независни потсистеми од облик:

$$\dot{\eta}_k(t) = (J_f(s(t)) - \lambda_k \Gamma) \eta_k(t), k = 2, \dots, N, \quad (4.7)$$

каде $\eta_k(t) \in \mathbb{R}^n$ ги претставува трансверзалните координати, а $J_f(s(t))$ е Јакобијанската матрица на локалната динамика евалуирана по синхронизираната траекторија. Стабилноста на синхронизираната состојба се постигнува доколку сите трансверзални режими се асимптотски стабилни, што доведува до критериум за синхронизабилност изразен преку спектралниот опсег на лапласијанската матрица [13], [20].

Овој пристап ја нагласува фундаменталната улога на топологијата во определувањето на доменот на синхронизација, при што поголема алгебарска поврзаност води кон зголемена робусност на системот кон нарушувања и параметарски варијации. Во продолжение ќе биде разгледан поопштиот случај на мултимрежни динамички структури, кај кои синхронизацијата се јавува како резултат на поврзаност помеѓу повеќе слоеви на поврзаност и динамика, што доведува до појава на далекусежни ефекти на синхронизабилност.

4.4 Далекусежни ефекти на синхронизабилност кај мултимрежни динамички системи

Во рамките на теорија на сложени динамички системи, синхронизабилноста кај мултимрежни структури претставува суштинско системско својство кое произлегува од

заемното дејство помеѓу локалната динамика на поединечните потсистеми и глобалната тополошка организација на нивната меѓусебна поврзаност. За разлика од класичните мрежни системи, кај мултимрежните динамички структури, стабилноста на синхронизираната состојба не е определена исклучиво од спектралните својства на поединечните лапласијански матрици, туку од комбинираната динамика на меѓумрежните спрегнувања и нивната временска варијабилност [15].

Во оваа насока, анализата развиена во рамките на ТЕМ трудот ја разгледува синхронизацијата како резултат на структурно-интегриран динамички процес во кој различни контролирани и неконтролирани подмрежи формираат колективна динамичка целина. Нека мултимрежниот систем е опишан со агрегираниот состојбен модел:

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) - \mathcal{L}X(t) + U(t), \quad (4.8)$$

каде $X(t) \in \mathbb{R}^{nM}$ претставува глобален состојбен вектор, $F(\cdot)$ ја опишува нелинеарната локална динамика, $\mathcal{L}$ е комбинираната лапласијанска матрица која ги опфаќа внатрешните и меѓуслојните врски, а $U(t)$ е векторот на контролни влезови.

Клучниот резултат од анализата укажува дека присуството на нарушувања во меѓу мрежните врски може да доведе до значајни промени во доменот на стабилна синхронизација. Овој ефект може да се интерпретира преку редукција на динамиката во координатен систем дефиниран од сопствените вредности на матрицата $\mathcal{L}$, при што се добива дека динамиката на грешката на синхронизација е определена со систем од облик:

$$\dot{e}_i(t) = [Df(s) - \lambda_i H]e_i(t), \quad (4.9)$$

каде $e_i(t)$ претставува проекција на векторот на грешка во насока на i -тата сопствена вредност λ_i на комбинираната лапласијанска матрица, додека H е матрица на спрегнување [4], [5].

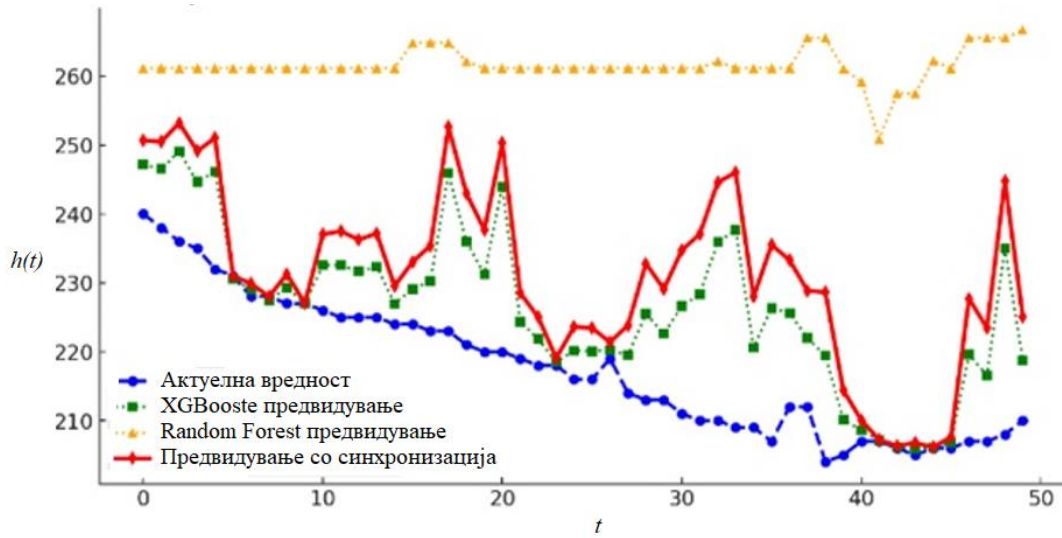
Анализата на стабилноста на системот (4.9) покажува дека меѓумрежните нарушувања доведуваат до стеснување на интервалот на стабилна синхронизација, што се манифестира преку намалување на алгебарската поврзаност на мултимрежната структура. Оттука следува дека робусноста на синхронизацијата е директно поврзана со степенот на меѓумрежно спрегнување, како и со распределбата на контролни јазли во рамките на системот.

Дополнително, резултатите укажуваат дека примената на стратегии на пининг контрола овозможува стабилизација на синхронизираната состојба и во услови на делумни структурни нарушувања. Во тој контекст, контролниот закон може да се запише во облик:

$$u_i(t) = -k_i(x_i(t) - s(t)), \quad (4.10)$$

каде k_i е коефициент на локална контрола, а $s(t)$ е референтната синхронизирана траекторија [6], [7].

Системската интерпретација на овие резултати укажува дека синхронизабилноста кај мултимрежните динамички системи претставува далекусежно својство кое го надминува локалниот карактер на поединечните врски. Наместо тоа, синхронизацијата се јавува како глобален феномен кој произлегува од колективната динамика на целокупната структура. Оваа перспектива овозможува синхронизацијата да се разгледува како фундаментален принцип на организација кај сложени технички и природни системи.



Слика бр. 4.1: Споредбена динамика на реалните вредности и предвидувањата добиени од поединечните модели и нивната синхронизирана комбинација [17].

Како што е прикажано на слика 4.1, синхронизираното предвидување покажува значително подобро совпаѓање со реалните вредности во однос на поединечните модели. Може да се забележи намалување на осцилациите и подобрена стабилност на динамичкиот одговор, што ја потврдува теоретската анализа за позитивното влијание на синхронизацијата.

Под стандардни претпоставки за инкрементална стабилност на локалната динамика на јазлите и позитивна определеност на матрицата на поврзување, стабилноста на синхронизираната состојба може да се карактеризира преку спектралните својства на комбинираниот лапласијански оператор.

Теорема 4.1: Робусна синхронизабилност кај мултимрежни системи со нарушувања

Нека мултимрежниот динамички систем е опишан со моделот (4.8), при што комбинираната лапласијанска матрица $\mathcal{L}$ има спектар $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{nm}$. Да претпоставиме дека локалната динамика е Липшиц-континуирана со константа L_f , а матрицата на поврзување E е позитивно определена.

Тогаш синхронизираната состојба $s(t)$ е глобално експоненцијално стабилна доколку постои константа на контрола $k_i > 0$ така што важи условот:

$$\lambda_2 \lambda_{\min}(H) > L_f. \quad (4.11)$$

Условот (4.11) покажува дека робусноста на синхронизацијата е определена од заемното дејство помеѓу спектралната поврзаност на мрежата и нелинеарната локална динамика на поединечните потсистеми.

Во присуство на меѓумрежни нарушувања кои доведуваат до намалување на алгебарската поврзаност λ_2 , синхронизацијата може да се зачува преку соодветна дистрибуција на јазли со пининг контрола.

Доказ

Да се разгледа динамиката на грешката дефинирана со $e(t) = X(t) - 1 \otimes s(t)$. Линеаризацијата околу синхронизираната траекторија доведува до варијациски систем од облик (4.9).

Со примена на класична Љапунов функција од облик:

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e, \quad (4.12)$$

се добива:

$$\dot{V}(e) \leq -(\lambda_2 \lambda_{\min}(H) - L_f) \|e\|^2. \quad (4.13)$$

Оттука следи дека условот (4.11) гарантира експоненцијално исчезнување на грешката и стабилност на синхронизираната состојба.

Забелешка 4.1 (Интерпретација во контекст на ТЕМ-резултатите)

Условот (4.11) експлицитно покажува дека намалувањето на меѓумрежното спрегнување доведува до намалување на λ_2 и го намалува доменот на стабилна синхронизација.

Ова е директно конзистентно со резултатите добиени во трудот објавен во ТЕМ Journal, каде се покажува дека структурните нарушувања во мултимрежните врски можат да предизвикаат транзиција од стабилна кон нестабилна колективна динамика.

Пропозиција 4.1: Стабилизација со пининг контрола

Нека множеството на контролирани јазли е $\mathcal{P} \subset \{1, \dots, nM\}$. Тогаш постои минимален број на пининг јазли $|\mathcal{P}|_{\min}$ така што системот останува синхронизабилен и во услови на делумна деградација на меѓумрежните врски.

Овој резултат ја потврдува системската улога на пининг контролата како механизам за зачувување на колективната стабилност кај мултимрежни динамички системи.

4.5 Системска интерпретација на далекусежните ефекти на синхронизабилност

Резултатите добиени во претходната секција укажуваат дека синхронизабилноста кај мултимрежните динамички системи претставува суштинско колективно својство кое не може да се редуцира на локалната динамика на поединечните потсистеми. Стабилноста на синхронизираната состојба произлегува од интегралното заемно дејство на структурната топологија, спектралните својства на комбинираните лапасијански оператори и распределбата на управувачките влијанија во рамките на целокупната мрежна архитектура. Оттука, синхронизацијата се јавува како глобален динамички режим чие постоење и стабилност се определуваат преку системската организација на врските [18].

Во мултимрежните структури, појавата на меѓумрежни нарушувања или временски варијабилни врски доведува до трансформација на глобалната динамичка конфигурација на системот. Овие структурни варијации можат да се манифестираат како транзиции помеѓу различни режими на колективно однесување, при што синхронизацијата се јавува како динамички процес чувствителен на еволуцијата на мрежната топологија. Ваквата чувствителност ја нагласува улогата на структурната поврзаност како суштински фактор во определувањето на стабилноста на распределените динамички процеси, особено кај големоразмерните технички системи со адаптивна или стохастички варијабилна организација.

Од системска перспектива, анализата на мултимрежната синхронизација укажува дека стабилноста на колективната динамика се определува преку глобалната организација на поврзаноста, а не исклучиво преку локалните параметри на поединечните компоненти. Во таа смисла, далекусежните ефекти на синхронизабилност можат да се интерпретираат како последица на структурната интегрираност на системот, при што локалните нарушувања или промени на поврзаноста можат да предизвикаат значајни промени во глобалниот динамички режим.

Дополнително, примената на пининг контролни стратегии овозможува системска компензација на негативните ефекти предизвикани од структурни нарушувања и временски варијации на топологијата. Со соодветен избор и позиционирање на контролни јазли, може да се обезбеди зачувување на стабилноста на синхронизираната состојба дури и во услови на делумна деградација на меѓумрежните врски. Овој резултат ја нагласува можноста за дизајн на распределени управувачки архитектури кои се робусни кон структурни нарушувања и динамички неизвесности.

Во поширока теоретска рамка, мултимрежната синхронизација може да се разгледува како фундаментален механизам на координација во сложени распределени динамички системи. Овој механизам ја нагласува потребата од аналитички пристапи кои ја интегрираат динамиката на состојбите со еволуцијата на мрежната структура, со што се отвора простор за развој на поопшти теории на стабилност кај системи со временски променлива тополошка организација.

Во таа насока, резултатите добиени во ова поглавје укажуваат на потребата од формализација на динамички граф-модел како природно проширување на класичната теорија на мрежни динамички системи. Овие модели претставуваат фундаментален инструмент за анализа на сложени динамички структури со адаптивна организација на поврзаноста и ќе бидат предмет на разгледување во следното поглавје [2].

4.6 Улога на тополошката структура и робусност на синхронизацијата

Синхронизацијата кај мрежните меѓуповрзани динамички системи претставува резултат на интегралното заемно дејство помеѓу локалната динамика на поединечните потсистеми и глобалната тополошка организација на мрежната структура. Во мултимрежните динамички конфигурации, тополошката организација ја определува спектралната структура на комбинираниите лапласијански оператори, кои непосредно ги

дефинираат условите за постоење и стабилност на синхронизираните режими на движење. Оттука, синхронизацијата се јавува како системско својство кое произлегува од структурната интегрираност на поврзаноста, а не како едноставна последица на локалните динамички карактеристики.

Алгебарската поврзаност, дефинирана преку втората најмала сопствена вредност на лапласијанската матрица, претставува фундаментална мера за степенот на структурна кохезија на системот и за неговата способност да развие стабилна колективна динамика. Намалувањето на оваа величина, како резултат на структурни нарушувања, деградација на меѓумрежните врски или појава на локални нарушувања, доведува до слабеење на стабилноста на синхронизираната многуобразност и до појава на неконзистентни динамички режими. Во таа смисла, спектралните карактеристики на топологијата претставуваат клучен индикатор за робусноста на синхронизацијата во големоразмерните динамички системи [11].

Во мултимрежните структури, робусноста на синхронизираната состојба не се определува исклучиво преку степенот на поврзаност во рамките на поединечните подмрежи, туку и преку нивната меѓусебна структурна поврзаност. Меѓумрежните врски функционираат како канали на динамичка координација кои ја посредуваат трансмисијата на влијанија низ различните слоеви на системот, при што нивната густина, просторна распределба и временска стабилност директно ја определуваат глобалната конзистентност на колективната динамика.

Од аспект на управувањето, пининг контролата претставува ефикасен механизам за зголемување на тополошката робусност на синхронизираните режими. Со соодветен избор и позиционирање на контролни јазли може да се постигне компензација на негативните ефекти од локални структурни нарушувања и да се обезбеди зачувување на стабилноста на синхронизираната динамика дури и во услови на делумна деградација на мрежната структура. Ова укажува дека тополошката организација и управувачките механизми треба да се разгледуваат како заемно поврзани компоненти на единствен системски процес [6].

Во реалните големоразмерни системи, тополошката структура често има временски варијабилан карактер и претставува резултат на адаптивни или стохастички механизми на поврзување. Оваа динамичка природа на мрежната организација ја наметнува потребата од аналитички рамки кои ја интегрираат динамиката на состојбите со еволуцијата на топологијата. Во таа насока, статичките модели на мрежна поврзаност претставуваат ограничена апроксимација, што ја оправдува формализацијата на поопшти теоретски концепти засновани врз динамички графови [16].

Оттука, тополошката робусност се јавува како суштински аспект на синхронизацијата кај мултимрежните динамички системи. Способноста на системот да одржи стабилна колективна динамика во присуство на структурни нарушувања е директно условена од спектралните својства на мрежната структура и од примената на соодветни распределени управувачки стратегии, со што се воспоставува јасна врска помеѓу структурната организација и стабилноста на колективните динамички режими.

4.7 Заклучни согледувања за синхронизабилност кај мрежно меѓуповрзани сложени динамички системи

Анализата спроведена во ова поглавје укажува дека синхронизабилноста кај мрежните меѓуповрзани сложени динамички системи претставува фундаментално системско својство кое произлегува од интегралното заемно дејство на локалната динамика, структурната топологија и карактерот на меѓумрежното поврзување. Во рамките на мултимрежните конфигурации, стабилноста на синхронизираната состојба не може да се разгледува исклучиво преку параметрите на поединечните потсистеми, туку мора да се анализира во контекст на глобалната организација на поврзаноста и нивната временска еволуција. Во таа смисла, синхронизацијата се јавува како резултат на структурната интегрираност на системот и на неговата способност да одржи координирана динамика во присуство на сложени меѓузависности.

Резултатите добиени преку спектралната анализа на комбинираните лапласијански оператори покажуваат дека алгебарската поврзаност претставува клучен индикатор за способноста на системот да постигне и одржи стабилна синхронизација. Намалувањето на оваа величина, како последица на структурни нарушувања, деградација на меѓумрежните врски или појава на стохастички варијации, доведува до слабеење на стабилноста на синхронизираната разновидност и до појава на делумно координирани или неконзистентни динамички режими. Во таа смисла, синхронизацијата може да се разгледува како чувствителен индикатор за глобалната структурна кохерентност и динамичка конзистентност на системот.

Дополнително, примената на пининг контролни стратегии овозможува системско подобрување на робусноста на синхронизацијата преку насочено влијание врз структурно-критичните јазли на мрежата. Овој пристап ја нагласува заемната поврзаност помеѓу управувачките механизми и тополошката организација, кои треба да се разгледуваат како интегрални аспекти на единствен динамички процес. Соодветната интеграција на контролни влијанија во мрежната структура овозможува зачувување на стабилноста на колективната динамика и во услови на делумна деградација на поврзаноста.

Во поширока теоретска рамка, резултатите од анализата на мултимрежната синхронизација укажуваат дека синхронизацијата може да се интерпретира како општ механизам на динамичка координација кај сложени распределени системи, чија стабилност е суштински условена од структурната организација на поврзаноста и од нивната временска варијабилност. Ова наметнува потреба од развој на аналитички формализации кои ја интегрираат динамиката на состојбите со еволуцијата на тополошката структура.

Во рамките на ова истражување, синхронизабилноста се разгледува во контекст на мултимрежни динамички структури со структурни варијации и нарушувања, при што се изведуваат услови кои ја поврзуваат стабилноста на синхронизираната состојба со спектралните својства на комбинираните лапласијански оператори. Особено, се покажува дека алгебарската поврзаност претставува клучен параметар кој ја определува робусноста на синхронизацијата во присуство на структурни нарушувања, а примената на пининг контрола овозможува насочено подобрување на синхронизабилноста преку влијание врз критичните јазли на мрежата. Со тоа, се воспоставува интегрирана теоретска рамка која ги

поврзува структурните, спектралните и управувачките аспекти на синхронизацијата кај сложени мрежни системи.

Оттука, разгледаните теоретски резултати природно водат кон формализација на концептот на динамички графови како средство за опис на сложени динамички системи со временски променлива мрежна организација. Во следното поглавје, синхронизацијата ќе биде анализирана во рамка на динамички граф-модел, каде структурната еволуција се разгледува како составен дел од динамиката на системот [1], [15], [18].

4.8 Литература

- [1] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002
- [2] A.-L. Barabási, *Network Science*. Cambridge University Press, 2016.
- [3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, no. 4–5, pp. 175–308, 2006. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009
- [4] S. V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul, H. E. Stanley and S. Havlin, “Catastrophic cascade of failures in interdependent networks,” *Nature*, vol. 464, pp. 1025–1028, 2010. DOI: 10.1038/nature08932
- [5] J. Gao, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley and S. Havlin, “Networks formed from interdependent networks,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 40–48, 2011. DOI: 10.1038/nphys2180
- [6] J. Qin, W. X. Zheng and H. Gao, “A study of synchronization of complex networks via pinning control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 2, pp. 528–533, Feb. 2012.
- [7] X. F. Wang and G. Chen, “Pinning control of scale-free dynamical networks,” *Physica A*, vol. 310, pp. 521–531, 2002. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)00772-0
- [8] C. Li and G. Chen, “Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays,” *Physica A*, vol. 343, pp. 263–278, 2004. DOI: 10.1016/j.physa.2004.05.066
- [9] J. Lu and G. Chen, “A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 6, pp. 841–846, 2005. DOI: 10.1109/TAC.2005.849200
- [10] A. E. Motter, “Cascade control and defense in complex networks,” *Physical Review Letters*, vol. 93, 098701, 2004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.098701
- [11] T. Nishikawa and A. E. Motter, “Network synchronization landscape reveals compensatory structures,” *Physical Review E*, vol. 73, 065106, 2006. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.065106
- [12] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004. DOI: 10.1109/TAC.2004.834113
- [13] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 2109–2112, 1998. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2109
- [14] M. Porfiri and D. J. Stilwell, “Consensus seeking over random weighted directed graphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1767–1773, 2007. DOI: 10.1109/TAC.2007.904453
- [15] T. Ren, S. Sun, Y. Xie, Z. Li, R. Wang, X. Cheng and G. M. Dimirovski, “Synchronization for multi-network with two types of inter-network coupling faults: pinning control effects,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 17, pp. 2415–2427, 2020. DOI: 10.1049/iet-cta.2019.1458

- [16] D. J. Stilwell, E. M. Bollt and D. G. Roberson, “Sufficient conditions for fast switching synchronization in time-varying network topologies,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 140–156, 2006. DOI: 10.1137/050634488
- [17] B. Temelkovski, Y. Jing, M. Stankovski and G. M. Dimirovski, “Synchronization of XGBoost and Random Forest algorithms for optimizing river level prediction,” *TEM Journal*, 2025.
- [18] C. W. Wu, *Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems*. World Scientific, 2007.
- [19] W. Yu, G. Chen and M. Cao, “Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1089–1095, 2010. DOI: 10.1016/j.automatica.2010.03.006
- [20] C. Zhou and J. Kurths, “Hierarchical synchronization in complex networks with heterogeneous degrees,” *Chaos*, vol. 16, 015104, 2006. DOI: 10.1063/1.2150387.

ГЛАВА 5

Декадното откритие на Шилјак како унифицирана рамка на динамички графови за анализа на сложени системи

Развојот на теорија на големоразмерните и мрежните динамички системи природно доведе до потреба од формализам кој ќе овозможи истовремено разгледување на нивната динамичка еволуција и структурна трансформација. Во таа насока, концептот на динамички графови, формулиран во рамките на школата на Шилјак, претставува суштинско теоретско проширување на класичните модели на меѓуповрзани системи. Овој пристап овозможува надминување на традиционалната поделба помеѓу динамиката на состојбите и тополошката организација, воведувајќи унифицирана перспектива во која мрежната структура се разгледува како составен дел од динамичкиот процес.

Динамичките графови претставуваат фундаментален аналитички инструмент за опис на сложени системи чија поврзаност е временски променлива и резултат на адаптивни, стохастички или управувачки механизми. Во рамките на оваа концептуална рамка, тополошката структура на системот не се третира како фиксна геометриска конфигурација, туку како динамичка величина која коеволуира со состојбената динамика. Ваквиот формализам овозможува системска интерпретација на појавите на координација, синхронизација и стабилност кај комплексни мрежни структури, особено во услови на структурна варијабилност.

Во контекст на претходното поглавје, каде синхронизабилноста беше анализирана како резултат на заемното дејство на локалната динамика и глобалната тополошка организација, концептот на динамички графови претставува природно продолжение и продлабочување на оваа теоретска линија. Тој обезбедува математичка основа за формализирање на системи со временски зависна поврзаност и овозможува воспоставување на мост кон поопшти модели на структурно-променливо управување и интегративно-надзорни архитектури.

Важно е да се истакне дека разгледувањето на динамичките графови во ова поглавје нема карактер на нов научен придонес, туку претставува клучна теоретска основа која ја подготвува аналитичката рамка за последователните истражувања во дисертацијата. Во таа смисла, ова поглавје има улога на концептуален мост помеѓу резултатите од анализата на синхронизабилноста и формализацијата на структурно-променливото управување и интегративно-надзорните принципи во големоразмерните динамички системи.

Во продолжение ќе биде разработен концептот на динамички граф како модел на сложени системи, со акцент на неговата улога во унифицираната анализа на динамиката и топологијата, како и на неговото значење за современите инженерски и кибер-физички системи со адаптивна мрежна организација.

5.1 Концепт на динамички граф како модел на сложени системи

Анализата на сложени динамички системи бара формализам кој ќе овозможи опис на нивната структурна и временска еволуција во единствена математичка рамка. Во таа насока, концептот на динамички граф претставува природно проширување на класичните модели на статички мрежи, при што тополошката структура на системот се разгледува како временски зависна величина која се развива заедно со динамиката на состојбените променливи [5], [10].

Динамичкиот граф може да се дефинира како временско зависно пресликување кое на секој временски момент му придружува тополошка структура опишана преку соодветна матрица на поврзаност. Нека $\mathcal{G}(t)$ означува динамички граф дефиниран во временски интервал $t \geq 0$, при што неговата структура е определена со матрицата на соседство $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогаш еволуцијата на графот може да се разгледува како траекторија во соодветен функционален простор на тополошки структури [5], [21].

Во оваа формулација, динамичкиот граф не се третира како фиксна геометриска конфигурација, туку како динамички објект чија структура се менува под влијание на внатрешните врски и надворешните нарушувања. Овој пристап овозможува интегрирана анализа на динамиката и топологијата, при што состојбената еволуција на системот и еволуцијата на неговата мрежна организација се разгледуваат како меѓусебно поврзани процеси.

Формално, нека состојбата на системот е опишана со вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$, а тополошката структура со оператор $\mathcal{L}(t)$, кој ја претставува лапласијанска матрица на графот $\mathcal{G}(t)$. Тогаш динамиката на системот може да се запише во облик:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - \mathcal{L}(t)x(t), \quad (5.1)$$

каде $f(\cdot)$ ја опишува локалната динамика на поединечните потсистеми. Равенката (5.1) претставува основен модел на динамички граф, во кој тополошката структура се јавува како временски зависен оператор кој директно влијае врз глобалната динамика на системот.

Ваквата формулација ја надминува класичната поделба помеѓу структура и динамика, воведувајќи унифицирана перспектива во која тополошката организација се третира како интегрален дел од динамичкиот процес. Ова е од особено значење кај современите сложени системи, како што се: енергетските мрежи, комуникациските инфраструктури и големоразмерни интелигентни системи, каде поврзаноста помеѓу компонентите се менува во реално време [1], [22].

Дополнително, концептот на динамичките графови овозможува формулирање на нови критериуми за стабилност и робусност кои ги опфаќаат ефектите од временски променливата топологија. Во овој контекст, стабилноста на системот не се определува само од спектралните својства на статичката лапласијанска матрица, туку од еволуцијата на целиот тополошки оператор во текот на времето [9], [23].

Оттука, динамичките графови претставуваат фундаментална математичка рамка за анализа на сложени системи со адаптивна мрежна структура. Овој концепт овозможува интеграција на класичната теорија на динамички системи со современите пристапи во

мрежната наука, создавајќи основа за понатамошна анализа на синхронизацијата, координацијата и стабилноста во системи со висока структурна комплексност.

5.2 Стабилност на динамички графови

Во рамките на концептот на динамичките графови, стабилноста на сложените системи се разгледува како својство кое произлегува од заемното дејство на временската еволуција на тополошката структура и динамиката на состојбените променливи. За разлика од класичните модели со статична поврзаност, кај динамичките графови стабилноста мора да се анализира во контекст на оператори кои се временски зависни и чие спектрално однесување може да варира во текот на еволуцијата на системот [9].

Нека динамичкиот граф $\mathcal{G}(t)$ е опишан преку временски зависна лапласијанска матрица $\mathcal{L}(t)$, а динамиката на системот е дадена со моделот (5.1). Во таков контекст, стабилноста на рамнотежната состојба x^* се дефинира во смисла на стабилност на комбинираниот динамичко-тополошки систем. Ова подразбира дека не е доволно да се анализира стабилноста на системот за фиксна топологија, туку е неопходно да се земе предвид целокупната траекторија на тополошката еволуција [2].

За да се формализира овој концепт, може да се разгледа Љапуновата функција од следниот облик:

$$V(x, t) = x^T(t)P(t)x(t), \quad (5.2)$$

каде $P(t)$ е позитивно определена временски зависна матрица. Услов за стабилност на динамичкиот граф е постоењето на таква функција за која важи:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\alpha \|x(t)\|^2, \quad (5.3)$$

за некоја константа $\alpha > 0$. Овој услов имплицира дека стабилноста на системот е зачувана и покрај временските варијации на тополошката структура.

Особено значајна е појавата на т.н. рамнотежен граф, кој претставува тополошка конфигурација кон која системот асимптотски тежнее во текот на својата еволуција. Во ваква конфигурација, динамиката на системот се стабилизира и тополошките промени престануваат да имаат значајно влијание врз колективното однесување [16], [18].

Дополнително, стабилноста на динамичките графови може да се анализира преку концептот на структурна стабилност, при што се разгледува чувствителноста на системот на мали тополошки нарушувања. Во овој контекст, спектралната анализа на лапласијанската матрица игра клучна улога, бидејќи сопствените вредности на $\mathcal{L}(t)$ ја одредуваат динамичката кохерентност на системот [5], [21].

Од системска перспектива, стабилноста на динамичките графови претставува генерализација на класичните резултати за стабилност на меѓуповрзани системи. Овој пристап овозможува анализа на сложени структури во кои топологијата е резултат на адаптивни или управувани процеси, што е од особено значење кај современите кибер-физички и големоразмерните интелигентни системи [16].

Со тоа, концептот на стабилност на динамичките графови претставува теориска основа за понатамошна анализа на координацијата, синхронизацијата и робусноста во системи со временски променлива мрежна структура.

5.3 Позитивни динамички графови и инваријантна структура на сложени системи

Во рамките на концептот на динамички граф, посебна класа на системи претставуваат т.н. позитивни динамички графови, кај кои состојбените променливи и нивната поврзаност се ограничени на позитивниот ортант на состојбениот простор. Овој пристап е од суштинско значење при моделирање на системи во кои негативните вредности немаат физичка интерпретација, како што се биолошките популациски модели, економските структури на поврзаност и големоразмерни ресурсни системи.

Нека динамиката на системот е опишана со моделот:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - \mathcal{L}(t)x(t), \quad (5.4)$$

каде $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ е состојбен вектор со ненегативни компоненти, а $\mathcal{L}(t)$ е лапласијанска матрица која ја опишува тополошката структура на позитивниот динамички граф. Услов за позитивност на системот е инваријантноста на позитивниот ортант, односно важи:

$$x(0) \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (5.5)$$

Овој услов имплицира дека тополошката структура и динамиката на поврзаност мора да бидат такви што системот не ја напушта физички релевантната област на состојбениот простор.

Во анализата на позитивните динамички графови, особено значајна улога имаат М-матриците, кои обезбедуваат природна врска помеѓу тополошката стабилност и структурната монотонија на системот. Спектралните својства на овие матрици гарантираат дека динамиката останува ограничена и дека системот може да постигне стабилна рамнотежна конфигурација [2].

Дополнително, позитивните динамички графови овозможуваат интерпретација на сложените интеракциски структури преку аналогија со класичните модели од типот на Lotka–Volterra, каде интеракциите помеѓу компонентите се моделираат како процеси на кооперација или конкуренција. Во такви модели, тополошката структура на графот ја одредува природата на динамичките односи, додека стабилноста на системот зависи од балансот помеѓу позитивните и негативните интеракциски влијанија.

Од системска перспектива, позитивните динамички графови претставуваат важна класа на модели кои овозможуваат интеграција на структурните и динамичките аспекти на сложените системи. Овој пристап е особено значаен во анализата на распределени системи со ограничени ресурси, каде синхронизацијата и координацијата се резултат на процеси кои се одвиваат во позитивен состојбен простор [1], [3].

Со тоа, концептот на позитивни динамички графови ја проширува класичната теорија на стабилност и обезбедува нова перспектива за анализа на сложени системи со структурна монотонија и инваријантни подпростори. Ова природно води кон разгледување на динамичките графови, каде синхронизацијата се анализира во услови на временски променлива тополошка структура.

5.4 Динамички граф како модел на сложени динамички системи

Моделирањето на сложени системи кои се состојат од повеќе меѓусебно поврзани потсистеми претставува централна тема во современата системска теорија. Во такви системи, однесувањето на целокупната структура не зависи само од динамиката на поединечните компоненти, туку и од природата и јачината на интеракциите помеѓу нив. Токму поради тоа, графовите претставуваат природна математичка алатка за опис на структурата на сложени системи, при што јазлите на графот ги претставуваат потсистемите, а рабовите ја опишуваат нивната меѓусебна интеракција [10].

Во класичните модели на меѓуповрзани системи, структурата на поврзувањата се смета за фиксна. Меѓутоа, во реалните системи поврзаноста помеѓу компонентите често се менува со текот на времето, било како резултат на надворешни нарушувања, било како последица на адаптивни процеси. За да се опише ваквата еволуција на структурата, се воведува концептот на динамички граф, при што матрицата на поврзаност станува временски зависна величина [16].

Нека сложениот систем се состои од N меѓусебно поврзани потсистеми. Состојбата на системот се опишува со вектор:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_N(t)]^T, \quad (5.6)$$

каде $x_i(t)$ ја претставува состојбата на i -тиот потсистем. Поврзувањата помеѓу потсистемите се опишуваат преку матрицата на поврзаност:

$$E(t) = [e_{ij}(t)], \quad (5.7)$$

каде $e_{ij}(t)$ ја претставува јачината на интеракцијата од потсистемот j кон потсистемот i .

Динамиката на сложениот систем може да се претстави со модел од облик:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), E(t)), \quad (5.8)$$

каде функцијата $F(\cdot)$ ја опишува комбинираната динамика на поединечните потсистеми и нивните меѓусебни интеракции.

Во рамките на концептот на динамички граф, се воведува и дополнителен управувачки механизам – т.н. координатор на поврзувањата, чија задача е да ја модифицира структурата на графот со цел да се постигне посакувано колективно однесување на системот. Координаторот може да се опише со сопствена динамика:

$$\dot{E}(t) = G(E(t), v(t)), \quad (5.9)$$

каде $v(t)$ претставува управувачки сигнал кој ја регулира еволуцијата на тополошката структура [2].

На овој начин, целокупниот систем се состои од два меѓусебно поврзани динамички процеси, и тоа динамиката на состојбата на потсистемите и динамиката на меѓусебните врски.

Во оваа рамка, динамиката на интерконекцискиот координатор се развива на побавна временска скала во однос на динамиката на потсистемите, што овозможува раздвојување на процесите и обезбедува стабилна коеволуција на состојбената и структурната динамика.

Оваа структура овозможува формулирање на нов концепт на стабилност, познат како поврзувачка стабилност, при што стабилноста на системот се анализира во услови на временски променлива топологија.

Интуитивно, системот се смета за поврзувачки стабилен доколку неговата стабилност се зачувува и покрај структурните промени во мрежата на поврзувања. Овој концепт има особено значење кај големи распределени системи, каде поврзаноста помеѓу компонентите може да се менува како резултат на нарушувања, реконфигурација или адаптивно управување [16], [18].

Воведувањето на координатор кој управува со динамиката на поврзувањата претставува важен чекор кон интеграција на структурната и динамичката контрола на сложени системи. На тој начин, поврзувањата се третираат како активен елемент на управувањето, а не само како пасивна структура на системот.

Со ова, динамичките графови обезбедуваат моќна математичка рамка за анализа и управување со сложени мрежни системи, при што топологијата и динамиката се разгледуваат како меѓусебно поврзани аспекти на единствен системски процес.

5.5 Динамички графови во мултиагент системи и колективна координација

Во теорија на распределени системи, мултиагентските структури претставуваат фундаментален модел за опис на колективно однесување кај сложени динамички системи. Во такви системи, секој агент се опишува како автономен динамички потсистем кој комуницира со останатите агенти преку мрежна топологија што може да се менува во текот на времето. Во оваа рамка, динамичките графови обезбедуваат природна математичка основа за анализа на координацијата и синхронизацијата кај системи со временски променлива поврзаност [3], [13].

Нека мултиагентскиот систем се состои од N агенти, при што состојбата на i -тиот агент е дадена со вектор $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$. Глобалната состојба на системот може да се претстави како:

$$x(t) = [x_1(t)^T \quad x_2(t)^T \quad \cdots \quad x_N(t)^T]^T, \quad (5.10)$$

додека интеракциите помеѓу агентите се опишуваат преку временски променлива матрица на поврзаност $E(t)$, која ја определува тополошката структура на динамичкиот граф.

Динамиката на системот може да се формулира како:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N e_{ij}(t) H_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (5.11)$$

каде $f_i(\cdot)$ ја опишува локалната динамика на агентот, а H_{ij} претставува оператор на интеракција помеѓу агентите i и j [13], [12].

Во рамките на концептот на динамички графови, координацијата на агентите може да се разгледува како процес на стабилизација на т.н. рамнотежна многообразност, која ја претставува множеството состојби во кои сите агенти постигнуваат колективно синхронизирано однесување. Во овој контекст, динамиката на топологијата $E(t)$ може да се моделира преку дополнителен управувачки закон:

$$\dot{E}(t) = \Phi(E(t), x(t)), \quad (5.12)$$

каде функцијата $\Phi(\cdot)$ ја опишува адаптивната еволуција на поврзувањата [14].

Овој пристап овозможува интеграција на структурната и динамичката контрола на мултиагентските системи, при што стабилноста на колективното однесување се разгледува во услови на временски променлива топологија. Концептот на поврзувачка стабилност се проширува во насока на стабилност на рамнотежната многообразност, што претставува генерализација на класичните резултати за консензус и синхронизација.

Особено значајна е можноста за формулирање на политетни услови за стабилност, при што тополошката структура на системот може да се разгледува како параметар кој се менува во рамките на одреден компактен множествен домен. Овој пристап овозможува анализа на робусноста на координацијата во присуство на структурни варијации и надворешни нарушувања [9].

Од системска перспектива, динамичките графови обезбедуваат унифицирана рамка за анализа на мултиагентските системи, при што координацијата, синхронизацијата и стабилноста се разгледуваат како различни аспекти на единствен процес на колективна организација. Овој концепт е од особено значење во современите инженерски апликации, како што се интелигентните енергетски мрежи, автономните транспортни системи и распределените платформи за обработка на податоци.

Со тоа, динамичките графови претставуваат клучна алатка за формализирање на колективната динамика во системи со адаптивна мрежна структура, обезбедувајќи теориска основа за понатамошен развој на методи за управување и синхронизација кај сложени распределени системи.

5.6 Динамичките графови како системска парадигма на современата теорија на сложени системи

Во рамките на современиот развој на теоријата на сложени меѓусебно поврзани динамички системи, концептот на динамички графови формулиран од Шилјак претставува

една од клучните научни парадигми во последната декада. Основната иновација на овој пристап се состои во трансформацијата на меѓуповрзувачката структура од статичка тополошка репрезентација во динамичка состојбена променлива, чија еволуција директно влијае врз колективното однесување на системот [16], [17], [18].

Во класичната теорија на големи системи, структурата на врските помеѓу потсистемите се разгледува како фиксна рамка во која се одвива состојбената динамика. Наспроти тоа, во концептот на динамички графови, топологијата се интерпретира како еволутивна конфигурација која може да се менува во зависност од состојбата на системот и надворешните влијанија. Со тоа се воведува нов системски простор, простор на графови, во кој секоја структурна конфигурација претставува точка од еволуцијата на системот [10], [21].

Во оваа теоретска рамка, динамиката на системот се разгледува како резултат на коеволуција на состојбените и структурните променливи. Овој пристап овозможува дефинирање на структурни траектории, односно временски еволуции на меѓуповрзувачката архитектура, кои можат да се анализираат преку проширување на класичните методи на стабилност. На тој начин, стабилноста на системот се разгледува не само во простор на состојби, туку и во простор на тополошки конфигурации.

Клучен теоретски резултат на оваа парадигма е воведувањето на поврзувачката стабилност како проширување на Љапуновата стабилност. Поврзувачката стабилност ја карактеризира способноста на мрежата да ја задржи функционалниот интегритет и кохерентност на интеракциите во услови на структурни промени во динамиката. Оваа концептуална рамка овозможува анализа на системи со временски променлива топологија, што претставува фундаментална карактеристика на современите технолошки и кибер-физички системи [16], [18].

Дополнително, концептот на координатор на поврзувања претставува суштинска управувачка иновација која произлегува од динамичката интерпретација на графовите. Преку воведување на нареден механизам кој ја регулира структурната организација, се создава можност за управување со колективната динамика преку контролирана еволуција на топологијата. Со тоа се воспоставува нов пристап во кој топологијата станува активен инструмент за постигнување стабилност и синхронизација кај сложени системи [17].

Во класичната теорија на големи системи, структурата на врските помеѓу потсистемите се разгледува како фиксна рамка во која се одвива состојбената динамика. Наспроти тоа, во концептот на динамички графови, топологијата се интерпретира како еволутивна конфигурација која може да се менува во зависност од состојбата на системот и надворешните влијанија. Со тоа се воведува нов системски простор – состојбен простор и простор на графови, во кој секоја структурна конфигурација претставува точка од еволуцијата на системот.

Во оваа теоретска рамка, динамиката на системот се разгледува како резултат на коеволуција на состојбените и структурните променливи. Овој пристап овозможува дефинирање на структурни траектории, односно временски еволуции на меѓуповрзувачката архитектура, кои можат да се анализираат преку проширување на класичните методи на стабилност. На тој начин, стабилноста на системот се разгледува не само во простор на состојби, туку и во простор на тополошки конфигурации.

Клучен теоретски резултат на оваа парадигма е воведувањето на поврзувачката стабилност како проширување на Љапуновата стабилност. Поврзувачката стабилност ја карактеризира способноста на мрежата да ја задржи функционалната интегритет и кохерентност на интеракциите во услови на динамички структурни промени. Оваа концептуална рамка овозможува анализа на системи со временски променлива топологија, што претставува фундаментална карактеристика на современите технолошки и кибер-физички системи.

Дополнително, концептот на координатор на поврзувања претставува суштинска управувачка иновација која произлегува од динамичката интерпретација на графовите. Преку воведување на надреден механизам кој ја регулира структурната организација, се создава можност за управување со колективната динамика преку контролирана еволуција на топологијата. Со тоа се воспоставува нов пристап во кој топологијата станува активен инструмент за постигнување стабилност и синхронизација кај сложени системи.

5.7 Системска интерпретација на динамичките графови

Концептот на динамички графови претставува фундаментална теоретска рамка која овозможува ново системско разбирање на сложените меѓусебно поврзани динамички системи. Во рамките на оваа дисертација, динамичките графови не се разгледуваат само како математичка апстракција на временски променлива топологија, туку како суштински механизам за опис и синтеза на колективната динамика кај големоразмерни системи [5], [10].

Во претходните поглавја беше покажано дека стабилноста и синхронизацијата на меѓуповрзаните системи не можат да се разгледуваат изолирано од нивната структурна организација. Во тој контекст, динамичките графови овозможуваат унифицирана репрезентација во која состојбената динамика и структурната динамика се интегрирани во единствен системски модел. Овој пристап создава теоретска основа за анализа на адаптивни мрежни структури, каде топологијата се јавува како активен елемент во процесот на управување [21].

Научниот придонес на оваа дисертација се состои во системската интерпретација и проширување на концептот на динамички графови кон синхронизација и координација на распределени интелигентни системи. Особено значајно е тоа што динамичките графови се користат како аналитичка алатка за опишување на процесите на синхронизација помеѓу повеќе алгоритамски единици, при што интеракцијата помеѓу моделите може да се третира како еволуција на структурата на поврзаност.

Во оваа рамка, динамичката топологија се јавува како посредник помеѓу локалната динамика на потсистемите и глобалното однесување на системот. Со тоа се воспоставува нова перспектива во која синхронизацијата не е само резултат на параметарска кохерентност, туку и на структурна адаптација на мрежата. Овој принцип е особено релевантен кај современите системи базирани на машинско учење, каде повеќе модели можат да се разгледуваат како динамички јазли во интелигентна мрежна архитектура.

Дополнително, интеграцијата на концептот на координатор на поврзувања овозможува формулирање на нови управувачки стратегии во кои топологијата на системот станува

управувачка променлива. Со тоа се создава мост помеѓу класичната теорија на децентрализирана контрола и современите пристапи кон кооперативна и адаптивна динамика кај сложени системи [16], [18].

Од системска перспектива, динамичките графови претставуваат универзален инструмент за опис на процесите на организација, координација и стабилизација кај големи мрежни структури. Во рамките на оваа дисертација, нивната примена овозможува поврзување на концептите на структурна декомпозиција, синхронизација, структурно-променливо управување и интегративно-надзорен принцип во единствена теоретска рамка.

Во таа насока, концептот на динамички графови претставува клучна теоретска основа за понатамошно разгледување на структурно-променливото управување и интегративните управувачки архитектури кај сложени меѓусебно поврзани системи, што ќе биде предмет на следните поглавја.

5.8 Литература

- [1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel, *Linear Systems*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2006.
- [3] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martínez, *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2009.
- [4] J. Cortés, “Distributed algorithms for reaching consensus on general functions,” *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 726–737, 2008.
- [5] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1997.
- [6] M. Dehmer, *Structural Analysis of Complex Networks*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2011.
- [7] E. Estrada, *The Structure of Complex Networks*. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2012.
- [8] L. C. Freeman, “Centrality in social networks: Conceptual clarification,” *Social Networks*, vol. 1, no. 3, pp. 215–239, 1978.
- [9] J. P. Hespanha, “Uniform stability of switched linear systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 5, pp. 403–411, 2004.
- [10] D. Kempe, J. Kleinberg, and É. Tardos, “Maximizing the spread of influence through a social network,” in *Proc. ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining*, 2003, pp. 137–146.
- [11] J. Kleinberg, “Complex networks and decentralized search algorithms,” in *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, 2007, pp. 1019–1044.
- [12] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [13] A. Nedić and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
- [14] R. Olfati-Saber, “Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401–420, 2006.
- [15] A. Olshevsky and J. N. Tsitsiklis, “Convergence speed in consensus,” *SIAM Review*, vol. 53, no. 4, pp. 747–772, 2011.

- [16] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [17] D. D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems*. Boston, MA, USA: Academic Press, 1991.
- [18] D. D. Šiljak and A. Zečević, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback,” *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, pp. 169–179, 2005.
- [19] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, “Flocking in fixed and switching networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 863–868, 2007.
- [20] J. N. Tsitsiklis, “Problems in decentralized decision making,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1984.
- [21] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.
- [22] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, 1998.
- [23] L. Xiao and S. Boyd, “Fast linear iterations for distributed averaging,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 1, pp. 65–78, 2004.

ГЛАВА 6

Структурно-променливо управување кај сложени меѓусебно поврзани динамички системи

Разгледувањето на динамичките графови како унифицирана рамка за опис на сложени меѓусебно поврзани системи води кон прашањето за синтеза на управувачки механизми кои ќе овозможат целно обликување на нивната колективна динамика. Во оваа насока, структурно-променливото управување се јавува како концептуално проширување на класичните пристапи во теоријата на децентрализирана контрола, при што меѓуповрзувачката структура на системот се третира како активна управувачка компонента [1], [3].

За разлика од традиционалните методи на стабилизација, кои претежно се насочени кон регулирање на состојбената динамика при фиксна тополошка конфигурација, структурно-променливиот пристап овозможува истовремена синтеза на динамичките и структурните параметри на системот. Со тоа се создава можност за адаптивно обликување на колективното однесување кај сложени меѓусебно поврзани системи, особено во услови на временски променлива мрежна организација [7].

Во рамките на ова поглавје се разгледува класа генерализирани меѓуповрзани динамички системи, за кои се развива теоретска рамка за децентрализирана синтеза на структурно-променливи управувачки закони. Посебно внимание се посветува на условите за стабилизација во смисла на Љапунов, како и на можностите за скалабилна примена на предложените методи кај системи со висока димензионалност и сложена меѓуповрзана структура [2], [5].

6.1 Структурно-променливо управување кај меѓуповрзани сложени динамички системи

Во согласност со концептуалната рамка воведена во претходната секција, во оваа потсекција се разгледува формализацијата на структурно-променливото управување кај класа генерализирани меѓуповрзани динамички системи. Акцентот е ставен врз развој на математички модел и синтеза на децентрализирани управувачки закони кои овозможуваат стабилизација на системот во присуство на структурни варијации.

Во контекст на генерализираните модели, структурно-променливото управување овозможува систематска анализа и синтеза кај системи со алгебарски ограничувања и сложена интерконекциска структура. Овие модели се карактеристични за современи

технолошки системи како што се: интелигентни енергетски мрежи и кибер-физички системи [5], [6].

Во ова поглавје се разгледува структурно-променлив пристап кон стабилизација на меѓусебно поврзани дескрипторски системи, при што се формулираат услови за децентрализирана синтеза на управувачки закони базирани на структурна декомпозиција. Притоа, посебно внимание се посветува на анализа на стабилноста во смисла на Љапунов и на развој на методи кои овозможуваат скалабилна имплементација кај системи со висока димензионалност [2].

Основата на разгледуваниот пристап се темели на резултати презентирани во рамките на научен труд на конференцијата ЕТРАН 2024, кои овде се преработуваат и интегрираат во пошироката теориска рамка на дисертацијата. Со тоа се обезбедува конзистентна врска помеѓу теоријата на динамичките графови, концептот на синхронизабилност и синтезата на структурно-променливи управувачки стратегии.

Во продолжение најнапред се формулира математичкиот модел на разгледуваната класа системи, по што се разгледуваат условите за стабилизација и се презентира главниот теориски резултат кој ја дефинира рамката на предложениот пристап.

Со тоа се воспоставува формална врска со концептите на синхронизабилност и динамички графови разработени во претходните поглавја.

6.2 Математички модел на меѓусебно поврзани дескрипторски системи

Во рамките на структурно-променливото управување се разгледува класа на сложени динамички системи составени од повеќе меѓусебно поврзани потсистеми, при што нивната динамика е опишана со генерализиран дескрипторски модел. Овој тип модели овозможува унифициран опис на системи кај кои се присутни и динамички и алгебарски релации, што е особено значајно кај системи со висока структурна комплексност [5], [6].

Нека динамиката на разгледуваниот систем е дадена со:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.1)$$

каде $x(t) \in \mathbb{R}^n$ е вектор на состојба, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ е управувачки вектор, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е евентуално сингуларна матрица, додека $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ја опишува интерконекциската структура на системот. Матрицата $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ја дефинира распределбата на управувачките влијанија врз поединечните потсистеми [5].

Структурата на матрицата A се претпоставува дека ја рефлектира тополошката организација на меѓусебните интеракции, односно дека може да се разгледува како составена од блок-матрици кои ја опишуваат локалната динамика и меѓусебната поврзаност. Овој пристап овозможува формална врска помеѓу дескрипторската формулација и мрежната репрезентација на сложениот систем [1], [3].

Со цел да се овозможи децентрализирана анализа и синтеза на управување, се воведува структурна трансформација од облик:

$$x(t) = Tz(t), \quad (6.2)$$

каде $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е невингуларна трансформацииска матрица [9]. Со примена на оваа трансформација, системот (6.1) се доведува во еквивалентна форма:

$$\tilde{E}\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t), \quad (6.3)$$

при што:

$$\tilde{E} = T^{-1}ET, \tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B. \quad (6.4)$$

Во оваа структурна форма, системот може да се разгледува како составен од потсистеми со пониска димензија, што овозможува формулирање на децентрализиран управувачки стратегии. Особено значајно е тоа што структурната трансформација овозможува издвојување на регуларниот дел на системот, кој ја носи суштинската динамика, од алгебарскиот дел кој ги одразува структурните ограничувања [8], [9].

Овој математички модел претставува основа за синтеза на структурно-променлив управувач, при што стабилизацијата на глобалната динамика се постигнува преку управување со локалните интеракции помеѓу потсистемите. Во продолжение ќе бидат формулирани претпоставките и условите под кои може да се обезбеди стабилност на затворениот систем.

6.3 Претпоставки и формулација на проблем на стабилизација

Со цел да се овозможи синтеза на структурно-променлив управувач кај разгледуваната класа меѓусебно поврзани дескрипторски системи, неопходно е да се формулираат соодветни претпоставки кои ја дефинираат природата на динамиката и структурата на поврзувањата. Овие претпоставки обезбедуваат математичка рамка во која може да се анализира стабилноста на затворениот систем и да се синтетизира соодветен управувачки закон.

Се претпоставува дека матрицата E во моделот (6.1) е регуларна во смисла дека парот (E, A) дефинира добро поставен дескрипторски систем, односно дека постои единствено решение за соодветни почетни услови [5]. Дополнително, се претпоставува дека меѓуповрзувачката структура опишана преку матрицата A е таква што системот може да се разложи на потсистеми со пониска димензија преку соодветна структурна трансформација [9].

Во рамките на разгледуваниот пристап, се претпоставува дека управувачките влијанија се достапни преку матрицата B , при што нејзината структура ја рефлектира распределеноста на управувањето низ системот. Ова овозможува формулирање на децентрализиран управувачки закони, кои се имплементираат локално на ниво на поединечни потсистеми [7].

Понатаму, се разгледува класа на нелинеарни нарушувања кои можат да влијаат врз динамиката на системот, при што се претпоставува дека тие се ограничени во соодветна норма. Оваа претпоставка е од суштинско значење за формулирање на услови за стабилност во смисла на Љапунов [10], [11].

Со формулирањето на овие структурни и динамички претпоставки се создава основа за дефинирање на проблемот на стабилизација кај меѓусебно поврзаните дескрипторски системи, кој ќе биде разгледан во продолжение.

Во рамките на разгледуваниот модел (6.1), задачата на управување се состои во синтеза на управувачки закон кој ќе обезбеди стабилност на затворениот систем во смисла на Љапунов, земајќи ги предвид структурните ограничувања и распределената природа на управувањето. Во таа насока, се разгледува управувачки закон од облик:

$$u(t) = Kx(t), \quad (6.5)$$

каде $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ е матрица на повратна врска која треба да се одреди така што динамиката на затворениот систем:

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (6.6)$$

ќе биде стабилна [10].

Во случај на присуство на нелинеарни нарушувања, системот може да се разгледува во проширен облик:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x(t)), \quad (6.7)$$

при што функцијата $\Phi(\cdot)$ ја опишува нелинеарната динамика која произлегува од меѓусебните интеракции и надворешните влијанија. Целта на управувачот во овој случај е да обезбеди робусна стабилност на системот и покрај присуството на нелинеарни ефекти [11].

Проблемот на стабилизација се формулира како задача за определување на матрицата K и соодветните услови под кои затворениот систем ќе биде асимптотски стабилен. Во рамките на структурно-променливото управување, дополнително се разгледува можноста матрицата K да има блок-структура која ја рефлектира тополошката организација на системот, со што се овозможува децентрализирана имплементација на управувачкиот закон [1], [3].

Со ваквата формулација се создава математичка основа за формулирање на главниот теориски резултат кој ќе биде разгледан во следната секција.

6.4 Главен теориски резултат за структурно-променлива стабилизација

Врз основа на формулираниот математички модел и поставените структурни претпоставки, се разгледува проблемот на стабилизација на меѓусебно поврзани дескрипторски системи преку синтеза на соодветен управувачки закон. Во оваа рамка, анализата на стабилноста се заснова на избор на соодветна функција на Љапунов, која ќе овозможи формулирање на доволни услови за асимптотска стабилност на затворениот систем.

Нека разгледуваниот систем е опишан со динамиката:

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad (6.8)$$

каде матрицата K претставува управувачка повратна врска која треба да се одреди така што системот ќе биде стабилен. Со цел анализа на стабилноста, се разгледува функција на Љапунов од облик:

$$V(x) = x^T P x, \quad (6.9)$$

каде $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е симетрична позитивно дефинитна матрица. Производот на функцијата на Љапунов по траекториите на системот (6.8) води до услови кои ја поврзуваат структурата на матриците A , B и K со стабилноста на затворениот систем [2].

Во рамките на структурно-променливиот пристап, изборот на матрицата K се врши така што ќе се задржи блок-структурата на системот, со што се овозможува децентрализирана реализација на управувачот. Оваа особина е од суштинско значење кај системи со голем број меѓусебно поврзани потсистеми, бидејќи овозможува скалабилна имплементација на управувачкиот закон [1], [3].

Со формулирањето на овие услови се создава математичка основа за дефинирање на главниот резултат, кој ќе биде презентираан во продолжение.

Врз основа на формулираниот математички модел и поставените претпоставки, може да се дефинира главниот резултат кој ја утврдува рамката за стабилизација на разгледуваната класа меѓусебно поврзани дескрипторски системи.

Теорема 6.1.

Нека системот е опишан со равенката:

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad (6.10)$$

Каде $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Нека парот (E, A) е регуларен, односно $\det(sE - A) \not\equiv 0$.

Доколку постои симетрична позитивно дефинирана матрица $P = P^T > 0$ така што важи:

$$(A + BK)^T P E + E^T P (A + BK) < 0, \quad (6.11)$$

тогаш затворениот систем е асимптотски стабилен во смисла на Љапунов.

Дополнително, доколку матрицата K ја задржува блок-структурата на меѓуповрзувачката конфигурација, стабилизацијата може да се реализира децентрализирано, односно преку локални управувачки закони на ниво на поединечни потсистеми.

Овој резултат претставува основа за синтеза на структурно-променливи управувачки стратегии кај сложени меѓусебно поврзани системи, бидејќи овозможува формулирање на стабилизационски услови кои директно ја рефлектираат тополошката структура на системот.

Доказ.

Да се избере функцијата на Љапунов:

$$V(x) = x^T P x, \quad (6.12)$$

каде $P = P^T > 0$ е симетрична позитивно дефинитна матрица. Очигледно важи:

$$V(x) > 0, x \neq 0, \quad (6.13)$$

и $V(0) = 0$ [2].

Долж траекториите на затворениот систем:

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (6.14)$$

изводот на функцијата $V(x)$ е даден со:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P E x + x^T P E \dot{x}. \quad (6.15)$$

Со замена на динамиката на системот од (6.14), се добива:

$$\dot{V}(x) = x^T (A + BK)^T P E x + x^T E^T P (A + BK) x \quad (6.16)$$

Оттука следи:

$$\dot{V}(x) = x^T [(A + BK)^T P E + E^T P (A + BK)] x \quad (6.17)$$

Според претпоставката на теоремата, матрицата:

$$(A + BK)^T P E + E^T P (A + BK) \quad (6.18)$$

е негативно дефинитна, односно важи:

$$(A + BK)^T P E + E^T P (A + BK) < 0 \quad (6.19)$$

Тогаш за секое $x \neq 0$ следи:

$$\dot{V}(x) < 0. \quad (6.20)$$

Со тоа е покажано дека функцијата $V(x)$ е строга Љапунова функција за затворениот систем. Оттука следи дека рамнотежната состојба $x = 0$ е асимптотски стабилна во смисла на Љапунов.

Дополнително, доколку матрицата на повратна врска K е избрана така што ја задржува блок-структурата на интерконекциската конфигурација, тогаш управувачкиот закон може да се реализира децентрализирано, односно секој потсистем се стабилизира со локално достапни информации. Ова ја докажува и втората тврдина на теоремата. [1], [3].

6.5 Нумеричка верификација на теориските резултати

Со цел да се потврди аналитички изведената структурно-променлива стратегија на управување, се разгледува систем составен од два меѓусебно поврзани потсистеми со

слична динамичка структура. Динамиката на секој потсистем е опишана во класична состојбена форма:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B u_i(t), y_i(t) = C_i x_i(t), i = 1, 2, \quad (6.21)$$

каде $x_i(t) \in \mathbb{R}^2$ е состојбениот вектор, $u_i(t)$ е управувачкиот сигнал, а $y_i(t)$ е излезната величина на i -тиот потсистем. За потребите на нумеричката верификација се разгледува регуларниот динамички дел на дескрипторскиот систем, кој по соодветна структурна трансформација се запишува во класична состојбена форма.

Матриците на првиот потсистем се:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 = (1 \quad 1), \quad (6.22)$$

додека за вториот потсистем важи:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 \\ 1.0 & -1.3 \end{pmatrix}, C_2 = (0 \quad 1) \quad (6.23)$$

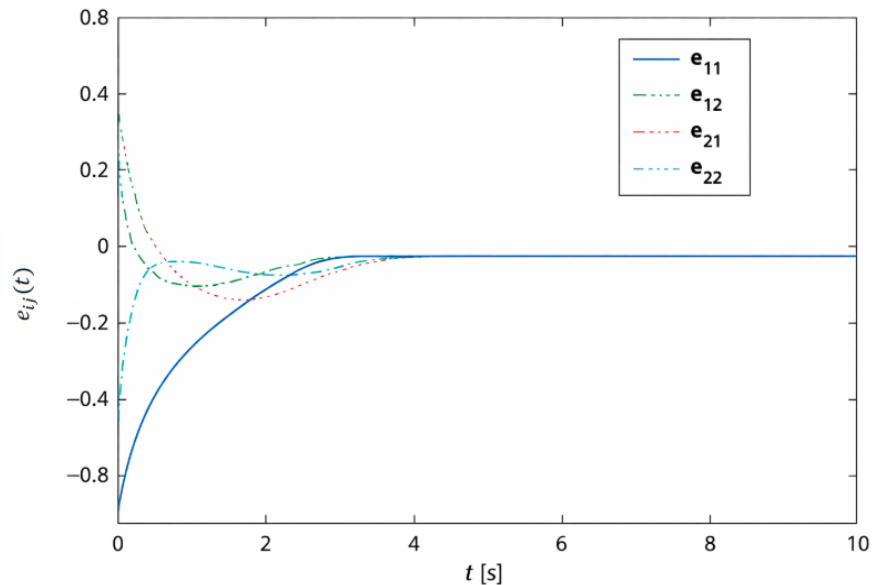
Се забележува дека двата потсистеми имаат идентична влезна матрица B , што овозможува унифицирана синтеза на управувачките закони. Разликата во матриците A_1 и A_2 внесува структурна разновидност, додека различните излезни матрици C_1 и C_2 дефинираат различни линеарни комбинации од состојбите.

Почетните состојби се избрани така што системот започнува со значителна иницијална отстапка:

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} -0.56 \\ 2.52 \end{pmatrix}, x_2(0) = \begin{pmatrix} -0.23 \\ 0.08 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

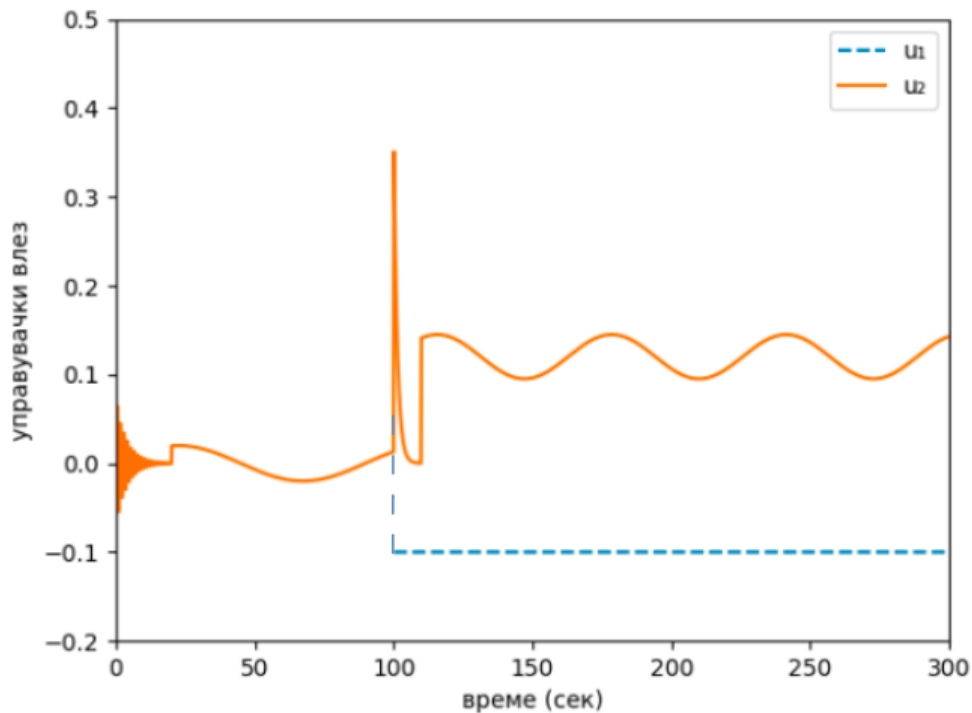
Овој избор овозможува анализа на транзиентното однесување и способноста на управувачот да обезбеди стабилизација во почетната фаза.

Еволуцијата на сигналите на грешка $e_1(t)$ и $e_2(t)$ во затворена повратна врска е прикажана на сл. 6.1. Се забележува дека грешките монотонски се намалуваат и конвергираат кон нула во релативно краток временски интервал, што е во согласност со резултатите од Теорема 6.1.



Слика бр. 6.1: Сигнали на грешка $e_1(t)$ и $e_2(t)$ во затворена повратна врска, што ја потврдува асимптотската конвергенција кон нула

Еволуцијата на управувачките сигнали $u_1(t)$ и $u_2(t)$ е прикажана на сл. 6.2. Во почетниот интервал се јавува зголемена управувачка активност како последица на големите иницијални отстапки. По стабилизацијата на состојбите, амплитудата на сигналите значително се намалува, но не исчезнува целосно, што укажува на присуство на робусен корективен механизам.

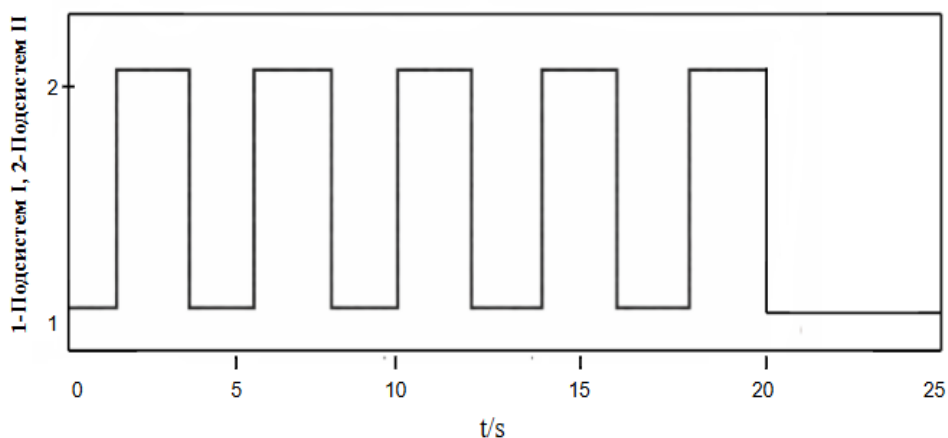


Слика бр. 6.2: Резултати од симулацијата: Еволуција на системот кон воспоставување на стационарни состојби на нелинеарните управувачки закони во услови на просторно-зависно префрлување

Применетиот закон на префрлување ја отсликува еволуцијата на меѓуповрзувачката структура на системот, при што промената на управувачките режими кореспондира со структурно-променливиот карактер на мрежната динамика.

Овој сигнал не претставува само симулациски ефект, туку манифестација на структурно-променливиот закон на управување, при што префрлувањето директно ја рефлектира еволуцијата на меѓуповрзувачката структура на системот.

На сл. 6.3 е прикажан сигналот поврзан со состојбено-зависниот механизам на префрлување. Се забележува периодична активација дури и по воспоставување на квази-стационарна состојба. Ова однесување не претставува нестабилност, туку индикатор дека управувачот останува активен во присуство на минимални флуктуации.



Слика бр. 6.3: Пример на период на состојбено-зависниот префрлувачки сигнал.

Добиените резултати ја потврдуваат ефективноста на предложената структурно-променлива стратегија и ја демонстрираат нејзината применливост кај меѓусебно поврзани динамички системи со структурна хетерогеност. Воедно, нумеричката анализа ја потврдува структурната стабилизабилност формулирана во Теорема 6.1, покажувајќи дека предложениот управувач обезбедува асимптотска стабилност во услови на временски променлива меѓуповрзана структура.

6.6 Научен придонес и заклучни согледувања

Во ова поглавје е развиена теоретска рамка за структурно-променлива стабилизација на сложени меѓусебно поврзани дескрипторски динамички системи, при што меѓуповрзувачката структура се третира како активна системска променлива во процесот на управување. Со тоа се воспоставува проширен аналитички пристап во кој стабилноста на колективната динамика се разгледува како резултат на коеволуција на состојбените и структурните параметри на системот.

Основниот научен придонес се состои во формулирањето на доволни услови за структурна стабилизабилност базирани на Љапунова анализа и структурна декомпозиција, со што се овозможува децентрализирана синтеза на управувачки закони кај генерализирани меѓуповрзани системи. Овој резултат претставува надградба на класичните концепти на

децентрализирана стабилизација, бидејќи ја интегрира динамиката на меѓуповрзувачката структура во аналитичката формулација на проблемот на управување [1], [3].

Предложениот структурно-променлив пристап овозможува зачувување на модуларната организација на системот и обезбедува скалабилна имплементација на управувачките механизми кај системи со висока димензионалност и сложена тополошка конфигурација. На тој начин се воспоставува формална врска помеѓу структурните својства на мрежата и стабилизациските карактеристики на глобалната динамика, што претставува значајно проширување на современите резултати во теоријата на дескрипторски и мрежни динамички системи[7].

Нумеричката верификација ја потврдува практичната реализабилност на предложените стабилизациски услови и ја демонстрира нивната ефективност во услови на структурна хетерогеност, иницијални нарушувања и временски променлива меѓуповрзана организација. Со тоа се потврдува дека структурно-променливото управување претставува соодветна теоретска и инженерска алатка за анализа и синтеза на стабилни колективни режими кај сложени големоразмерни системи.

Од системска перспектива, добиените резултати укажуваат дека стабилизацијата на колективната динамика кај големоразмерните системи не може да се разгледува изолирано од процесите на координација и надзор. Ова природно води кон потребата од воведување на интегративно-надзорни управувачки архитектури, кои овозможуваат усогласување на локалните управувачки механизми и обезбедување на глобална стабилност и адаптивност на системот [1].

Во таа насока, следното поглавје е посветено на развој на интегративно-надзорниот принцип, кој претставува логично продолжение на концептот на структурно-променливо управување и обезбедува повисоко ниво на системска координација кај сложени меѓусебно поврзани динамички системи.

6.7 Литература

- [1] L. Bakule, “Decentralized control: An overview,” *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 87–98, 2008.
- [2] L. Dai, *Singular Control Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [3] Z. Gong, “Decentralized robust control of uncertain interconnected systems with prescribed degree of exponential convergence,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 704–707, 1995.
- [4] Z. Gong, C. Wen, and D. P. Mital, “Decentralized robust controller design,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 850–854, 1996.
- [5] M. Ikeda and D. D. Šiljak, “Decentralized stabilization of linear time-varying systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 106–107, 1980.
- [6] M. Ikeda, D. D. Šiljak, and D. E. White, “An inclusion principle for dynamic systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, pp. 244–249, 1982.
- [7] M. Ilic and J. Zaborszky, *Dynamics and Control of Large Electric Power Systems*. New York, NY, USA: Wiley, 2000.
- [8] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2004.

- [9] P. Moylan and D. Hill, "Stability criteria for large-scale systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, pp. 143–149, 1978.
- [10] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [11] D. D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems*. Boston, MA, USA: Academic Press, 1991.
- [12] D. D. Šiljak and A. Zečević, "Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback," *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, pp. 169–179, 2005.
- [13] Z. Sun and S. S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer, 2005.
- [14] T. Wada, M. Ikeda, and E. Uezato, "Stability analysis of nonlinear descriptor systems," in *Complex Systems*. Springer, 2022, pp. 127–141.
- [15] Y. H. Wang and S.-Y. Zhang, "Robust control for nonlinear similar composite systems," *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, vol. 147, pp. 80–84, 2000.
- [16] G. H. Yang, S.-Y. Zhang, and J. Lam, "Robust stability and stabilization of uncertain composite systems with circulant structures," *Automatica*, vol. 31, pp. 5453–5458, 1996.
- [17] J. Zhao, Y. Jing, T. Kolemisevska, and G. M. Dimirovski, "Two theorems on controllability preserving decomposition of complex symmetry nonlinear systems," *Facta Universitatis*, vol. 17, pp. 1–10, 2004.
- [18] W.-S. Zhong, J. D. Stefanovski, G. M. Dimirovski, and J. Zhao, "Decentralized control and synchronization," *Kybernetika*, vol. 45, pp. 151–167, 2009.
- [19] A. I. Zečević and D. D. Šiljak, *Control of Complex Systems: Structural Constraints and Uncertainties*. Springer, 2010.

ГЛАВА 7

Интегративно-надзорен принцип кај сложени меѓусебно поврзани динамички системи

Развојот на концептот на структурно-променливо управување покажа дека стабилизацијата и синхронизацијата на сложени меѓусебно поврзани системи бараат не само локални управувачки механизми, туку и повисоко ниво на системска координација. Во услови на висока димензионалност, структурна хетерогеност и временски променлива интерконекциска организација, локалните управувачи обезбедуваат стабилност на поединечните потсистеми, но не секогаш гарантираат оптимално глобално однесување на целокупниот систем.

Во оваа насока, интегративно-надзорниот принцип се јавува како концептуално проширување на структурно-променливото управување, при што се воведува дополнително ниво на системска организација кое овозможува координација, адаптација и синхронизација на распределените управувачки структури. Овој пристап ја интегрира динамиката на локалните управувачи со глобалните цели на системот, создавајќи унифицирана рамка за управување со колективната динамика кај сложени мрежни структури.

Интегративно-надзорниот механизам може да се интерпретира како системски слој кој ја регулира еволуцијата на меѓуповрзаната архитектура и управувачките параметри во согласност со глобалните критериуми за стабилност, робусност и перформанси. Со тоа се воспоставува формална врска помеѓу концептите на динамички графови, синхронизабилност и структурно-променливо управување, што овозможува синтеза на управувачки стратегии кај системи со комплексна организациска структура.

Во рамките на ова поглавје ќе биде развиена теоретска рамка за интегративно-надзорно управување, со акцент на формулирање на математички модел на надзорниот механизам, условите за стабилност и синхронизација, како и неговата примена кај сложени големоразмерни динамички системи. На тој начин се обезбедува логичен и системски континуитет со претходните резултати, при што интегративниот надзор се разгледува како следна етапа во еволуцијата на современите концепти на управување со сложени системи.

За разлика од поглавје 6, каде управувањето е формулирано во рамките на локални структурно-променливи закони, во ова поглавје се воведува надзорен слој кој овозможува глобална координација и управување со колективната динамика на мрежата.

7.2 Математички модел на интегративно-надзорното управување

Во продолжение се разгледува мрежен нелинеарен динамички систем составен од N меѓусебно поврзани потсистеми со временски доцнења во меѓусебните врски.

Разгледуваниот модел претставува природна еволуција на претходно разработените концепти на синхронизација, при што управувачката архитектура овде се формулира во рамките на интегративно-надзорниот принцип.

Динамиката на i -тиот потсистем е опишана со равенката:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t - \tau) + u_i(t) \quad (7.1)$$

каде што $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ е состојбениот вектор на потсистемот, $f_i(\cdot)$ ја опишува неговата нелинеарна локална динамика, $c > 0$ е коефициент на спрегнување, a_{ij} се елементи на матрицата на интерконекциска топологија, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е матрица на внатрешно спрегнување, а $\tau \geq 0$ е константно временско доцнење.

Структурната организација на разгледуваниот мрежен систем може формално да се опише преку Лапасова репрезентација на меѓуповрзувачката топологија:

$$L = D - A \quad (7.2)$$

каде што $A = [a_{ij}]$ е матрица на соседство, а D е дијагонална матрица на степени на јазлите. Оваа репрезентација воспоставува врска со концептите на динамички графови разработени во претходното поглавје, при што спектралните својства на L играат клучна улога во анализата на синхронизабилноста.

Целта на управувањето е да се постигне синхронизација на сите потсистеми кон заедничка референтна динамика $s(t)$, односно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, i = 1, \dots, N \quad (7.3)$$

Во рамките на интегративно-надзорниот принцип, синхронизацијата се разгледува како колективен процес кој произлегува од координираното дејство на локалните управувачи и надзорниот механизам. За таа цел се воведува синхронизациска грешка дефинирана со:

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t), \quad (7.4)$$

со што задачата на управувањето се сведува на стабилизација на динамиката на грешката во присуство на временски доцнења и структурни неизвесности.

Од системска перспектива, моделот (7.1)–(7.4) претставува интегративна рамка која ги поврзува концептите на синхронизација, структурно-променливо управување и динамички графови. Во оваа рамка, надзорниот механизам не делува само како координациски слој, туку како системска компонента која ја регулира колективната динамика преку адаптивна еволуција на меѓуповрзувачката структура.

Во следната секција ќе биде формулирана управувачката архитектура базирана на координаторски механизам и структурно-променлива контрола, која овозможува робусна синхронизација на разгледуваниот систем.

7.3 Координаторски механизам и структурно-цопроменливо управување

Во рамките на интегративно-надзорниот принцип, синхронизацијата на мрежните динамички системи не се постигнува исклучиво преку локална стабилизација, туку преку координирана регулација на колективната динамика. За таа цел се воведува координаторски механизам кој ја интегрира работата на локалните управувачи и обезбедува глобална кохерентност на системот.

Координаторот се дефинира врз основа на спектралните својства на лапласијанска матрица (7.2). Нека $\xi \in \mathbb{R}^N$ е нормализиран лев сопствен вектор на L кој одговара на сопствената вредност нула, односно:

$$\xi^T L = 0. \quad (7.5)$$

Со користење на векторот ξ , се дефинира координаторска лизгачка површина од облик:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i(t), \quad (7.6)$$

каде што $e_i(t)$ е синхронизациската грешка дефинирана со (7.4). Оваа површина претставува колективна мерка за оддалеченоста на системот од синхронизираната состојба и овозможува интегрирана регулација на динамиката на целокупната мрежа.

Управувачкиот сигнал се синтетизира во форма на структурно-променлива контрола

$$u_i(t) = -k_i \Gamma \operatorname{sgn}(s(t)), \quad (7.7)$$

каде што $k_i > 0$ е засилување на управувачот, а $\operatorname{sgn}(\cdot)$ ја означува знаковната функција применета компонентно.

Со цел да се анализира стабилноста на предложената координаторска архитектура, се разгледува динамиката на синхронизациската грешка дефинирана со (7.4).

Воведувајќи ја координаторската површина (7.6), динамиката на колективната грешка може да се изрази во агрегирана форма:

$$\dot{s}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i \dot{e}_i(t). \quad (7.8)$$

Со замена на динамиката на системот (7.1) и управувачкиот закон (7.7), се добива:

$$\dot{s}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i (f_i(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t - \tau) - k_i \Gamma \operatorname{sgn}(s(t))). \quad (7.9)$$

Бидејќи векторот ξ е лев сопствен вектор на лапласијанската матрица што одговара на сопствената вредност нула, важи:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i a_{ij} = 0 \quad (7.10)$$

што овозможува елиминација на меѓуповрзувачките членови во агрегираниот опис на динамиката.

Со тоа се добива поедноставена форма:

$$\dot{s}(t) = F(x(t)) - K\Gamma \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (7.11)$$

каде $F(x(t))$ претставува агрегирана нелинеарна динамика на системот, а K е дијагонална матрица на засилувања.

Со тоа се добива редукција на проблемот на синхронизација кон проблем на структурно-променлива стабилизација. Во оваа рамка, структурно-променливата контрола обезбедува робусна стабилизација на локалната динамика, додека координаторскиот механизам ја гарантира глобалната координација на системот, што претставува суштината на интегративно-надзорниот принцип.

Во продолжение се разгледува анализата на стабилноста на предложената управувачка архитектура, при што се формулираат доволни услови за асимптотска синхронизација на системот.

7.4 Услови за асимптотска синхронизација

Во оваа секција се формулираат доволни услови под кои предложената координаторска структурно-променлива управувачка архитектура обезбедува асимптотска синхронизација на мрежен динамички систем во присуство на временски доцнења и структурна хетерогеност.

Нека нелинеарните функции $f_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, задоволуваат глобален Липшиц услов од облик:

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L_i \|x - y\|, i = 1, \dots, N, \quad (7.12)$$

каде $L_i > 0$ е Липшиц константа која ја ограничува локалната нелинеарна динамика.

Следејќи ја агрегирачката постапка воведена во секција 7.3, динамиката на синхронизациската грешка може да се изрази во компактна форма:

$$\dot{e}(t) = F(e(t)) - c(L \otimes \Gamma)e(t - \tau) + u(t), \quad (7.13)$$

Каде $e(t) = [e_1^T(t), \dots, e_N^T(t)]^T$ е вектор на грешки на синхронизациски, $F(\cdot)$ ја претставува агрегирана нелинеарна динамика, L е лапласијанска матрица на меѓуповрзаната топологија, Γ е матрица на внатрешно спрегнување и $\tau \geq 0$ претставува временско доцнење.

За анализа на стабилноста се воведува Љапунова функција дефинирана врз инваријантна синхронизациска разновидност (7.6):

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T(t) s(t), \quad (7.14)$$

каде $s(t)$ ја претставува агрегирана мерка на колективната синхронизациска грешка.

Диференцирајќи ја (7.14) долж траекториите на системот (7.13) и користејќи го управувачкиот закон (7.7), се добива:

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_{\min}(K) \|s(t)\| + \bar{L} \|s(t)\| + c\lambda_{\max}(L) \|\Gamma\| \|e(t-\tau)\|, \quad (7.15)$$

Каде $\bar{L} = \max_i L_i$, $\lambda_{\min}(K)$ е минимална сопствена вредност на матрицата на засилување и $\lambda_{\max}(L)$ е максимална сопствена вредност на лапласијанот.

Оттука следи дека, доколку засилувањата на управувачот се изберат така што:

$$\lambda_{\min}(K) > \bar{L} + c\lambda_{\max}(L) \|\Gamma\|, \quad (7.14)$$

Тогаш:

$$\dot{V}(t) < 0,$$

што имплицира асимптотска конвергенција на координаторската површина кон нула.

Следната теорема претставува основен теоретски резултат на ова поглавје.

Теорема 7.1

Да се разгледа мрежен динамички систем опишан со (7.1) во присуство на временско доцнење $\tau \geq 0$.

Доколку важат следните услови:

1. нелинеарната динамика задоволува В услов (7.12),
2. лапласијанската матрица L има едноставна нулта сопствена вредност,
3. управувачкиот закон е даден со (7.7),
4. засилувањата ги задоволуваат условите (7.16),

тогаш затворениот систем постигнува асимптотска синхронизација.

Доказ

Од (7.15)–(7.16) следи дека Љапуновата функција е строго опаѓачка надвор од множеството:

$$\mathcal{S} = \{s(t) = 0\}.$$

Според Ла Саловата (LaSalle) инваријантна теорема, траекториите на системот конвергираат кон најголемото инваријантно множество содржано во $\mathcal{S}$, од каде. по дефиниција на координаторската површина (7.6) следи:

$$e_i(t) \rightarrow 0, i = 1, \dots, N. \quad (7.17)$$

Со тоа се обезбедува асимптотска синхронизација на сите потсистеми.

Резултатите од Теорема 7.1 покажуваат дека координаторскиот механизам претставува интегративна надзорна структура која ја стабилизира колективната динамика преку структурно-променлива повратна врска. На тој начин се воспоставува формална врска помеѓу спектралните својства на мрежната топологија, локалната нелинеарна динамика и глобалната синхронизациска стабилност.

Овој резултат претставува системско проширување на концептите на структурно-променливо управување разгледани во поглавје 6 и ја поставува теоретската основа за воведување на адаптивни надзорни механизми во услови на параметарска неизвесност.

Во следната секција ќе биде разработена адаптивна стратегија која овозможува синхронизација во случај кога горните граници на нелинеарностите не се познати.

7.5 Адаптивна стратегија на интегративно-надзорното управување

Во претходната секција беше претпоставено дека нелинеарната динамика на потсистемите задоволува Липшицов услов со познати горни граници. Меѓутоа, кај реални сложени мрежни системи овие граници често не се достапни, а други се временски променливи како последица на структурни и параметарски неизвесности. Во такви услови, фиксниот избор на управувачките засилувања може да доведе до конзервативно управување или до недоволна стабилизациска способност на затворениот систем.

Со цел да се надмине ова ограничување, во рамките на интегративно-надзорниот принцип се воведува адаптивна стратегија на управување која овозможува динамичко прилагодување на засилувањата во зависност од еволуцијата на синхронизациската грешка.

Адаптивниот управувачки закон се дефинира во форма:

$$u_i(t) = -k_i(t) \Gamma \operatorname{sgn}(s(t)), \quad (7.18)$$

каде $k_i(t) > 0$ е временски променливо засилување кое се ажурира согласно адаптивен закон.

Динамиката на засилувањата се избира во облик:

$$\dot{k}_i(t) = \rho_i \|s(t)\|, \quad (7.19)$$

каде $\rho_i > 0$ е параметар на адаптација кој ја одредува брзината на прилагодување.

Со ваквата структура, засилувањата растат во присуство на значајна синхронизациска грешка, а нивната еволуција се стабилизира како што системот се приближува кон синхронизиран режим.

Се разгледува проширен кандидат за Љапунова функција од облик:

$$V(t) = \frac{1}{2} s^\top(t) s(t) + \sum_{i=1}^N \frac{(k_i(t) - k_i^*)^2}{2\rho_i}, \quad (7.20)$$

каде k_i^* се соодветно избрани позитивни константи.

Диференцирајќи ја (7.20) долж траекториите на системот и користејќи ги (7.18)–(7.19), се добива:

$$\dot{V}(t) \leq - \sum_{i=1}^N \eta_i \|s(t)\|, \quad (7.21)$$

за одредени позитивни константи η_i , што имплицира асимптотска конвергенција на координаторската површина кон нула.

Оттука следи дека предложената адаптивна управувачка стратегија обезбедува асимптотска синхронизација на мрежниот динамички систем и во услови кога горните граници на нелинеарностите не се познати.

Адаптивниот механизам претставува дополнителен надзорен слој кој ја зголемува робусноста на интегративно-надзорното управување. Со динамичко прилагодување на управувачките параметри, се овозможува компензација на параметарски неизвесности, адаптација кон структурни промени, зачувување на глобалната синхронизација и стабилност независно од точната форма на нелинеарностите.

Во системска смисла, предложениот резултат претставува природна еволуција на структурно-променливите управувачки стратегии, при што интегративниот надзорен механизам ја проширува нивната применливост кон класа на сложени адаптивни мрежни системи.

Во следната секција ќе биде дадена нумеричка верификација која ја демонстрира ефективностa на предложениот адаптивен управувач.

7.6 Нумеричка верификација на интегративно-надзорниот модел

Со цел да се потврди аналитичката валидност на предложената интегративно-надзорна управувачка архитектура, се разгледува мрежен динамички систем составен од хаотични јазли опишани со моделот на Чуа. Изборот на овој модел е мотивиран од неговата изразена нелинеарна динамика и чувствителност на иницијални услови, што претставува соодветна тест-платформа за оценка на робусноста на предложениот управувачки пристап.

Динамиката на поединечен јазол е дадена со:

$$\dot{x}_1 = p(-x_1 + x_2 - f(x_1)) \quad (7.22)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \quad (7.23)$$

$$\dot{x}_3 = -qx_2 \quad (7.24)$$

каде нелинеарната функција е дефинирана како:

$$f(x_1) = m_0 x_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|) \quad (7.25)$$

Параметрите на системот се избрани како:

$$p = 10, \quad q = 14.87, \quad m_0 = -1.27, \quad m_1 = -0.68.$$

Во мрежна форма, динамиката на i -тиот јазол може да се претстави во компактна состојбена форма:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + \phi(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) + Bu_i(t) \quad (7.26)$$

Каде:

$$A = \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

а нелинеарниот вектор е:

$$\phi(x_i) = \begin{bmatrix} -pf(x_{i1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

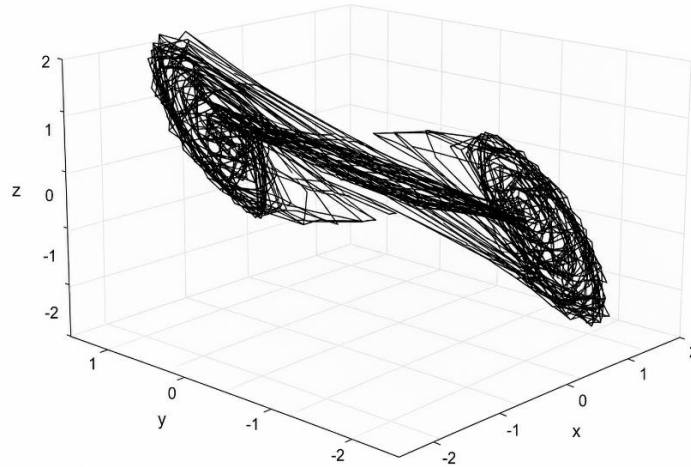
Матрицата на меѓуповрзувачките врски $A_c = [a_{ij}]$ ја опишува топологијата на мрежата, додека матрицата:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

го дефинира каналот преку кој се реализира управувањето.

Присуството на временско доцнење $\tau_{ij} < 0.02$ ја одразува реалната динамика на големоразмерните системи и овозможува анализа на стабилноста во услови на ограничен пренос на информации.

На слика 7.1 е прикажан фазниот портрет на поединечен хаотичен јазол, при што се забележува карактеристичниот двокрилен атрактор. Овој резултат ја потврдува силно нелинеарната природа на локалната динамика и ја оправдува потребата од интегративно-надзорна управувачка стратегија.



Слика бр. 7.1: Динамички системи на мрежни јазли: хаотични кола Чуа и просторен портрет на фазна состојба на неговата динамика

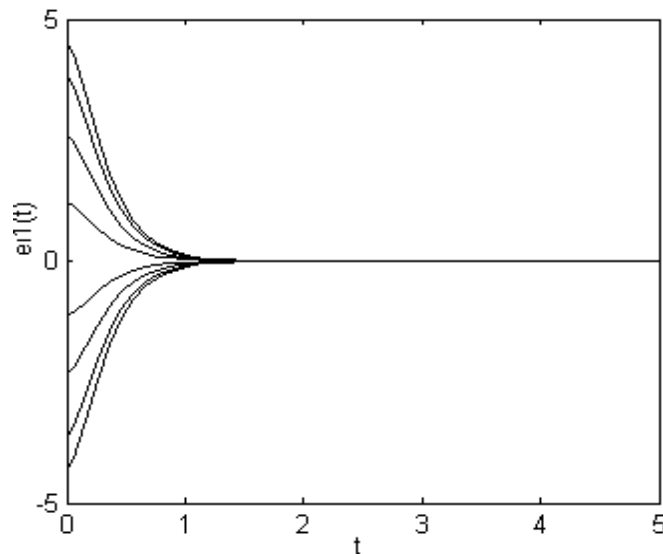
Во согласност со предложениот принцип, управувачкиот закон е дефиниран со:

$$u_i(t) = -k_i \Gamma \operatorname{sgn}(s(t)). \quad (7.30)$$

Еволуцијата на синхронизациските грешки:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_1(t) \quad (7.31)$$

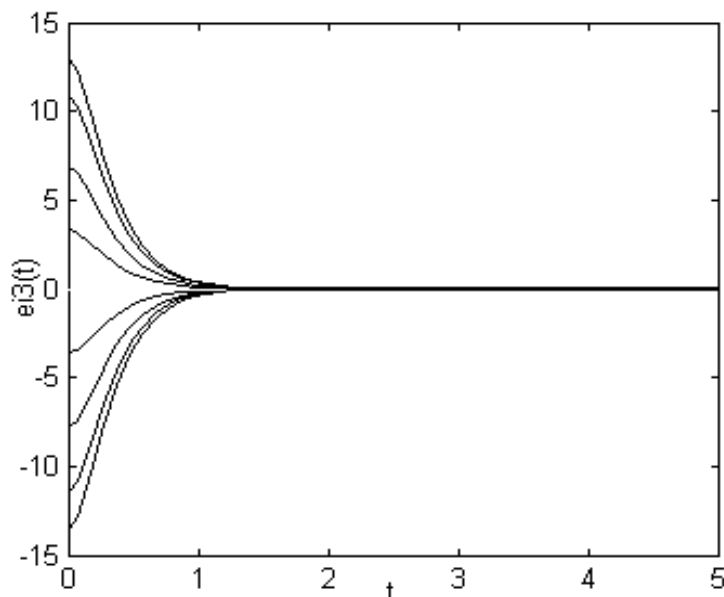
е прикажана на слика 7.2. Се забележува дека грешките монотонски конвергираат кон нула, што ја потврдува асимптотската синхронизација на системот.



Слика бр. 7.2: Временска еволуција на компонентите на синхронизациската грешка $e_1(t)$ и $e_2(t)$ кај мрежа од Чуа хаотични осцилатори.

На слика 7.3 се прикажани управувачките сигнали. Во почетната фаза се јавува засилена управувачка активност како последица на хаотичната динамика и иницијалните отстапки.

По воспоставување на синхронизиран режим, сигналите се стабилизираат околу ниско амплитудни вредности.



Слика бр.7.3: Временска еволуција на третата компонента на синхронизациската грешка $e_3(t)$ кај мрежа од Чуа хаотични осцилатори.

Од системска перспектива, добиените резултати потврдуваат дека интегративно-надзорниот структурно-променлив управувач обезбедува стабилна синхронизација дури и во присуство на хаотична динамика и временски доцнења. Со тоа се демонстрира применливоста на предложената теоретска рамка кај сложени меѓусебно поврзани системи.

7.7 Научен придонес и системска интерпретација на интегративно-надзорниот принцип

Во рамките на ова поглавје е развиен нов теоретски пристап за управување на мрежните сложени динамички системи заснован на концептот на интегративно-надзорна координација. Основната идеја се состои во синтеза на структурно-променливо управување со надзорна динамика која обезбедува глобална кохерентност на колективното однесување на мрежата.

Првиот научен придонес се состои во формализација на интегративно-надзорниот управувач како хиерархиска управувачка структура која ја поврзува локалната нелинеарна динамика со глобалната синхронизациска цел. Ова претставува новина бидејќи овозможува глобална координација без централизирана структура.

Вториот научен придонес се однесува на изведување на услови за асимптотска синхронизација на мрежните нелинеарни системи во присуство на временски доцнења. Со користење на векторска Љапунова анализа и Ла Саловата инваријантна теорема, се

покажува дека предложената управувачка архитектура обезбедува глобална конвергенција на синхронизациските грешки под релативно слаби структурни претпоставки. На овој начин се воспоставува директна врска помеѓу тополошките својства на мрежата и динамичките карактеристики на управувањето.

Третиот научен придонес се состои во развој на адаптивен механизам на интегративно-надзорното управување кој овозможува робусност во услови на неизвесна или временски променлива нелинеарна динамика. Со динамичко прилагодување на засилувањата на управувачот се елиминира потребата од претходно познавање на глобалните граници на нелинеарностите, што ја проширува применливоста на предложениот модел кај реални големоразмерни системи.

Четвртиот научен придонес се однесува на системската интерпретација на интегративно-надзорниот принцип како динамички механизам на координација кој ја обединува локалната стабилизација и глобалната синхронизација. Во оваа перспектива, управувачот не се разгледува само како средство за регулација, туку како структурен фактор кој ја обликува колективната динамика на мрежата. Оваа интерпретација е во согласност со современите концепции на управување кај комплексни мрежните системи и претставува теоретска основа за понатамошни истражувања во областа на динамичките графови и колективната стабилност.

Нумеричките резултати добиени врз основа на мрежа од хаотични системи на Чуа дополнително ја потврдуваат валидноста на предложената теоретска рамка. Покажано е дека интегративно-надзорниот управувач обезбедува стабилна синхронизација дури и во присуство на силна нелинеарност и временски доцнења, што ја нагласува неговата практична релевантност.

Со тоа, интегративно-надзорниот принцип може да се разгледува како нов системски концепт за управување на сложени мрежни динамички системи, кој ги обединува идеите на структурна стабилизација, координациска динамика и глобална синхронизација.

Во ова поглавје за првпат се покажува дека синхронизацијата може да се третира како управуван процес преку интегративно-надзорен механизам, а не само како својство на фиксна мрежна структура.

7.8 Литература

[1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.

[2] L. Bakule, “Decentralized control: An overview,” *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 87–98, 2008.

[3] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martínez, *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2009.

[4] J. Cortés, “Distributed algorithms for reaching consensus on general functions,” *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 726–737, 2008.

[5] J. P. Hespanha, “Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's invariance principle,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 5, pp. 403–411, 2004.

- [6] J. Kleinberg, “Complex networks and decentralized search algorithms,” in *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, 2007, pp. 1019–1044.
- [7] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [8] A. Nedić and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for Multi-Agent Optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
- [9] A. Olshevsky and J. N. Tsitsiklis, “Olshevsky and J. N. Tsitsiklis, “Convergence Speed in Distributed Consensus and Averaging,” *SIAM Review*, vol. 53, no. 4, pp. 747–772, 2011.
- [10] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, “Flocking in fixed and switching networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 863–868, 2007.
- [11] J. N. Tsitsiklis, “Problems in decentralized decision making,” Ph.D. dissertation, MIT, 1984.
- [12] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [13] D. D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems*. Boston, MA, USA: Academic Press, 1991.
- [14] D. D. Šiljak and A. Zečević, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback,” *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, pp. 169–179, 2005.
- [15] J. Zhao, Y. Jing, T. Kolemisevska, and G. M. Dimirovski, “Controllability preserving decomposition,” *Facta Universitatis*, vol. 17, pp. 1–10, 2004.

ГЛАВА 8

Системски согледувања и научна синтеза на резултатите

Во рамките на оваа дисертација е развиена интегрирана теоретска рамка за анализа и управување со сложени меѓусебно поврзани динамички системи, при што синхронизабилноста е разгледана како централна системска категорија, која ги поврзува структурните, динамичките и управувачките аспекти на големоразмерните системи [3].

Основната научна поставка на истражувањето се темели на тезата дека стабилноста и колективното однесување на сложените системи не се определуваат исклучиво од локалната динамика на поединечните потсистеми, туку од нивната меѓуповрзувачка структура и нејзината еволуција. Во оваа насока, дисертацијата воспоставува системска перспектива во која синхронизацијата, структурно-променливото управување и интегративно-надзорниот принцип се разгледуваат како меѓусебно поврзани нивоа на организација на колективната динамика.

Централниот теориски дел на дисертацијата е посветен на анализата на синхронизабилноста кај мрежни сложени динамички системи. Во рамките на оваа анализа се формулирани услови кои ја поврзуваат спектралната структура на мрежната топологија со стабилноста на синхронизираниите режими [1], [7]. На овој начин, синхронизацијата се интерпретира како системски феномен кој произлегува од интеракцијата помеѓу локалната динамика и глобалната структурна организација.

Разгледувањето на далекусежните ефекти на синхронизабилноста дополнително покажува дека структурните промени во еден дел од системот можат да влијаат врз колективното однесување на целокупната мрежа [3], [5]. Со тоа се отвора можност за нов тип управувачки стратегии во кои меѓуповрзувачката структура се третира како активна системска променлива.

Во таа насока, концептот на динамички графови претставува клучен теоретски мост помеѓу анализата на синхронизабилноста и синтезата на структурно-променливи управувачки механизми. Динамичките графови овозможуваат унифицирана репрезентација во која топологијата се разгледува како еволутивна конфигурација, чија динамика директно влијае врз стабилноста и координацијата на системот. Овој пристап претставува значајно проширување на класичната теорија на големи системи, бидејќи ја интегрира структурната и состојбената динамика во единствен аналитички модел.

На оваа теоретска основа е развиен структурно-променлив пристап кон стабилизација на меѓусебно поврзани дескрипторски системи [9], [10]. Формулираните резултати покажуваат дека стабилноста на колективната динамика може да се обезбеди преку координирано обликување на меѓуповрзувачката структура и локалните управувачки закони. Со тоа се воспоставува формална врска помеѓу структурната декомпозиција на системот и неговите стабилизационски својства.

Предложениот структурно-променлив управувач претставува аналитички придонес кој овозможува децентрализирана синтеза на управувачки стратегии кај системи со висока димензионалност и сложена меѓуповрзувачка организација. Нумеричките резултати ја потврдуваат ефективноста на овој пристап и ја демонстрираат неговата применливост кај системи со структурна хетерогеност и временски променлива топологија.

Понатамошна надградба на оваа аналитичка рамка е постигната преку развој на интегративно-надзорниот принцип на управување. Во оваа архитектура синхронизацијата се разгледува како резултат на координираното дејство на локалните управувачи и надреден координаторски механизам, кој ја регулира колективната динамика на системот.

Интегративно-надзорниот пристап овозможува формулирање на управувачки стратегии кои обезбедуваат робусна синхронизација и во присуство на нелинеарности, временски доцнења и структурни неизвесности [4], [7]. Со воведување на адаптивни механизми, управувачката архитектура станува способна динамички да ги прилагодува своите параметри во зависност од состојбата на системот, што претставува значајно проширување на класичните резултати во теоријата на кооперативна контрола.

Од системска перспектива, дисертацијата воспоставува хиерархиска рамка во која синхронизабилноста претставува фундаментален феномен на колективната динамика, структурно-променливото управување обезбедува механизам за стабилизација на сложените меѓуповрзани структури, а интегративно-надзорниот принцип претставува највисоко ниво на координација на распределените управувачки процеси.

Во таа смисла, динамичките графови имаат улога на концептуален медијатор кој овозможува системско поврзување на анализата на синхронизацијата со синтезата на современи управувачки архитектури. Со ова се воспоставува унифицирана теоретска рамка која ги интегрира структурните, динамичките и управувачките аспекти на сложените системи.

Резултатите од дисертацијата укажуваат дека понатамошниот развој на теоријата на големоразмерни системи ќе биде насочен кон понатамошна интеграција на структурната динамика со интелигентни управувачки механизми. Особено значајни се можностите за примена на предложените концепти кај кибер-физички системи, интелигентни енергетски мрежи и распределени алгоритамски структури базирани на машинско учење.

Во оваа насока, понатамошните истражувања може да бидат насочени кон развој на нелинеарни интегративно-надзорни стратегии, анализа на синхронизација кај мултимрежни структури и интеграција на структурно-променливото управување со современи методи на адаптивна и предиктивна контрола.

Со воспоставувањето на интегрирана теоретска рамка за анализа и управување со сложени меѓусебно поврзани динамички системи, дисертацијата придонесува кон унапредување на современата системска теорија и создава основа за нови истражувачки насоки во областа на мрежните динамички системи.

8.1 Главни научни придонеси на дисертацијата

Главните научни придонеси на ова истражување се концентрирани во три меѓусебно поврзани теориски насоки кои ја опфаќаат анализата, стабилизацијата и координацијата на сложени мрежни динамички системи. Овие насоки претставуваат интегрирана еволуција на современата системска теорија, во која структурните, динамичките и управувачките аспекти се разгледуваат како компоненти на единствен аналитички процес.

Првиот научен придонес се однесува на развојот на теориска рамка за синхронизабилност кај мрежни меѓусебно поврзани динамички системи. Во рамките на ова истражување се формулирани спектрални и структурни услови под кои може да се обезбеди стабилна колективна динамика во системи со сложена тополошка организација. Посебен акцент е ставен на улогата на алгебарската поврзаност и на спектралните својства на лапласијанска матрица како клучни индикатори за можноста за постигнување синхронизирано однесување. Овој резултат претставува проширување на класичните концепти на стабилност, при што синхронизацијата се интерпретира како структурно-детерминиран динамички феномен.

Вториот научен придонес се состои во формулирање на структурно-променлив пристап кон стабилизација на меѓусебно поврзани дескрипторски системи. Во оваа рамка, интерконекциската структура се третира како активна управувачка променлива, со што се овозможува синтеза на децентрализирани управувачки закони кои ја задржуваат модуларната организација на системот. Развиениот пристап овозможува интеграција на структурната декомпозиција со Љапуновата анализа и обезбедува услови за асимптотска стабилизација кај системи со висока димензионалност и сложени алгебарски ограничувања. Со тоа се воспоставува нова методолошка врска помеѓу тополошката организација и стабилизациските својства на сложените динамички системи.

Третиот научен придонес се однесува на развојот на интегративно-надзорен принцип за управување со мрежни динамички системи. Во оваа рамка, синхронизацијата се разгледува како резултат на координираното дејство на локалните управувачи и надреден координаторски механизам кој ја регулира глобалната динамика на системот. Предложениот пристап овозможува формулирање на управувачки архитектури во кои стабилноста и координацијата се обезбедуваат преку интеграција на структурно-променливи стратегии и спектрални својства на мрежната топологија. Овој резултат претставува значајна надградба на класичните концепти на децентрализирана контрола и отвора можности за примена кај современи распределени интелегентни системи.

Во рамките на дисертацијата, концептот на динамички графови има системска улога на унифицирана аналитичка рамка која ги поврзува наведените теориски резултати. Динамичките графови овозможуваат интеграција на состојбената и структурната динамика во единствен модел, со што се создава основа за формулирање на нови принципи на стабилност, синхронизација и управување кај системи со временски променлива топологија.

Со тоа, дисертацијата придонесува кон развојот на современата теорија на сложени мрежни системи преку воспоставување на конзистентна врска помеѓу синхронизабилноста, структурно-променливото управување и интегративно-надзорните управувачки архитектури. Овие резултати претставуваат теоретска основа за понатамошни истражувања

и инженерски апликации во области како што се: интелигентните енергетски мрежи, кибер-физичките системи и распределените алгоритамски платформи.

8.2 Системска интеграција и научна синтеза на резултатите

Добиените резултати во рамките на оваа дисертација не претставуваат изолирани теориски придонеси, туку формираат кохерентна системска рамка за анализа и управување на сложени мрежни динамички системи. Развиените методи и концепти овозможуваат воспоставување на единствена научна парадигма во која структурните својства на мрежата, динамичката интеракција на потсистемите и управувачките механизми се разгледуваат како интегриран функционален целокупен систем.

Во овој контекст, синхронизабилноста се појавува како фундаментално својство на колективната динамика, чие разбирање е суштинско за стабилното функционирање на големоразмерните системи. Развиената анализа покажува дека синхронизацијата не може да се разгледува исклучиво како последица на локалната стабилност на поединечните потсистеми, туку како резултат на нивната структурно-посредувана интеракција. На тој начин, спектралните својства на меѓуповрзувачката топологија се идентификуваат како клучен фактор кој ја одредува глобалната динамичка кохерентност.

Структурно-променливото управување претставува природна надградба на оваа перспектива, бидејќи овозможува динамичка адаптација на управувачката структура во согласност со еволуцијата на мрежната динамика. Со воведување на концептот на структурна стабилизабилност, се обезбедува теоретска основа за синтеза на управувачи кои ја гарантираат стабилноста на системот и во услови на временски променлива интерконекциска структура. Овој пристап ја надминува класичната рамка на фиксни управувачки закони и ја отвора можноста за системи со повисок степен на автономија и робусност.

Интегративно-надзорниот принцип, формализиран во рамките на ова истражување, претставува клучна точка на синтеза меѓу теоријата на синхронизација и современите концепти на децентрализирано управување. Преку воведување на координаторски механизам кој ја регулира колективната динамика, се воспоставува хиерархиска управувачка структура која обезбедува глобална стабилност без нарушување на локалната автономија на потсистемите. Оваа парадигма ја трансформира класичната децентрализирана контрола во интегриран системски механизам за координација на сложени динамички процеси.

Посебно значајна улога во оваа синтеза има концептот на динамички графови, кој овозможува структурна интерпретација на динамиката на големоразмерните системи. Преку формализација со графови се постигнува унификација на различните аспекти на анализата, односно тополошките својства, спектралните карактеристики и управувачките стратегии, во единствен аналитички јазик. На тој начин, динамичките графови претставуваат методолошка врска меѓу теоретските резултати за синхронизација и нивната примена во синтезата на управувачки закони

Севкупно, резултатите од дисертацијата демонстрираат дека стабилноста, синхронизацијата и управувањето кај сложените мрежни системи не треба да се

разгледуваат како одделни проблеми, туку како аспекти на единствен системски феномен. Развиената научна рамка обезбедува ново ниво на интеграција меѓу структурата и динамиката, што претставува суштински придонес кон современата теорија на големоразмерни динамички системи.

8.3 Научна валидација и позиционирање на резултатите

Резултатите добиени во оваа дисертација претставуваат конзистентна теоретска и методолошка надградба на современите истражувања во областа на синхронизацијата и управувањето на сложени мрежни динамички системи. Нивната научна валидност се потврдува преку јасно воспоставена корелација со постојните фундаментални концепти од теоријата на големоразмерни системи, динамички графови и структурно-променливо управување.

Во теоретска смисла, резултатите од поглавје 4 ја прошируваат класичната теорија на синхронизација преку системска интерпретација на спектралните и структурните услови за колективна стабилизација. На овој начин се надминува традиционалниот пристап базиран исклучиво на анализа на поединечни динамички компоненти и се воспоставува интегрален модел на синхронизабилност кој ја опфаќа интеракцијата помеѓу локалната динамика и глобалната тополошка структура. Ова позиционирање е во согласност со современите тенденции во теоријата на мрежни системи, каде синхронизацијата се третира како колективен феномен со системска природа.

Понатаму, резултатите од поглавје 6 обезбедуваат научна верификација на концептот на структурно-променливо управување како ефикасен механизам за стабилизација на системи со временски променлива меѓуповрзана структура. Во оваа рамка, предложениот управувачки закон не се интерпретира како локален стабилизатор, туку како динамички механизам кој ја регулира еволуцијата на структурните врски во системот. Ова претставува значајна надградба на класичните пристапи на децентрализирано управување и ја потврдува релевантноста на структурните методи во современата теорија на сложени системи.

Во поглавје 7 се развива интегративно-надзорен принцип кој воспоставува хиерархиска архитектура на управување, во која синхронизацијата се постигнува преку координирана интеракција на локалните управувачи и надзорниот механизам. Овој пристап ја проширува концептуалната рамка на динамичките графови и ја поврзува со теоријата на структурно-променливо управување, создавајќи единствена методолошка платформа за анализа и синтеза на управувачки закони кај сложени мрежни системи. Со тоа се воспоставува нова перспектива во која стабилизацијата, синхронизацијата и структурната адаптација се разгледуваат како меѓусебно поврзани процеси во рамките на интегративен системски модел.

Од научна перспектива, резултатите од ова истражување се позиционираат на пресекот помеѓу класичната теорија на стабилност, современата теорија на мрежни динамички системи и методите на структурно-променливо управување. Ова позиционирање овозможува нивна релевантност како во фундаменталните истражувања, така и во применетите инженерски дисциплини, особено во контекст на управување со распределени енергетски системи, комуникациски мрежи и комплексни технолошки инфраструктури.

Со тоа, дисертацијата воспоставува конзистентна научна рамка во која предложените резултати не претставуваат изолирани теоретски конструкции, туку системски интегрирани придонеси кои ја унапредуваат современата теорија на синхронизација и управување на сложени мрежни динамички системи.

8.4 Синтеза на научните резултати и системска кохерентност на дисертацијата

Развиената истражувачка рамка во оваа дисертација претставува интегриран научен придонес кој ја поврзува теоријата на синхронизација, структурно-променливото управување и интегративно-надзорниот принцип во единствен системски концепт за анализа и управување со сложени мрежни динамички системи. Притоа, централната научна оска на дисертацијата е формирана преку три меѓусебно поврзани нивоа на истражување: синхронизациско, структурно-управувачко и интегративно-координациско.

Во рамките на синхронизациската анализа е развиен пристап кој ја надминува класичната парадигма на синхронизација базирана на идеализирани осцилаторни модели, преку воведување на методологија заснована на реални податочни структури и алгоритамски динамики. Со тоа се воспоставува нов концепт на синхронизација кај предиктивни и алгоритамски управувани системи, при што динамичките графови се користат како унифицирана аналитичка рамка за опис на нивната колективна еволуција. Овој резултат претставува значајно проширување на современата теорија на синхронизација и ја демонстрира нејзината применливост во контекст на сложени технолошки системи базирани на податочни и интелигентни архитектури.

Структурно-променливото управување, разгледано во понатамошните поглавја, претставува природна надградба на синхронизациската анализа, при што интерконекциската структура на системот се третира како активна управувачка компонента. Со развојот на аналитички услови за стабилизација кои ја интегрираат структурната декомпозиција со Љапуновската анализа, се воспоставува формална врска помеѓу тополошката организација на системот и неговите стабилизациски својства. Овој пристап овозможува скалабилна и децентрализирана реализација на управувачките закони, што е од суштинско значење кај системи со висока димензионалност и сложена мрежна структура.

Интегративно-надзорниот принцип, како трето ниво на развиената научна рамка, обезбедува системска координација на распределените управувачки механизми преку воведување на координаторски архитектури кои ја регулираат колективната динамика на мрежата. Со ова се воспоставува хиерархиска управувачка структура во која локалната стабилизација, структурната адаптација и глобалната синхронизација се интегрирани во единствен концептуален модел. Таквиот пристап претставува современ системски одговор на предизвиците поврзани со управувањето на големоразмерни, нелинеарни и динамички променливи мрежни системи.

Во целина, дисертацијата демонстрира дека синхронизацијата, структурно-променливото управување и интегративно-надзорната координација не претставуваат изолирани теоретски концепти, туку делови од единствена научна парадигма за разбирање и управување со сложената колективна динамика. На тој начин се воспоставува системски

кохерентна теоретска рамка која ги обединува структурните, динамичките и управувачките аспекти на современите мрежни системи и отвора нови насоки за понатамошен научен и применет развој во оваа област.

8.5 Насоки за понатамошни истражувања и отворени научни прашања

Резултатите добиени во рамките на оваа дисертација отвораат повеќе насоки за понатамошно теоретско и применето истражување во областа на синхронизацијата и управувањето со сложени меѓусебно поврзани динамички системи. Иако развиената теориска рамка обезбедува системско обединување на концептите на синхронизација, структурно-променливо управување и интегративно-надзорна координација, нејзината понатамошна еволуција бара проширување во повеќе комплементарни истражувачки правци.

Една значајна насока претставува проширувањето на анализата на синхронизацијата кон системи со стохастичка динамика и неизвесна интерконекциска структура. Во современите инженерски и информатички системи, комуникациските врски често се подложни на случајни нарушувања и временски варијации, што бара развој на нови методи за робусна синхронизација, базирани на статистички и веројатносни модели [6], [2], [8].

Дополнително, концептот на структурно-променливо управување може да се прошири кон хибридни системи во кои динамиката се карактеризира со комбинација од континуирани и дискретни процеси. Во такви системи, управувачката стратегија треба да ја интегрира еволуцијата на состојбите со логичките механизми на префрлување, што претставува предизвик од аспект на стабилност и скалабилност.

Од посебен интерес е и понатамошното истражување на интегративно-надзорните архитектури во контекст на интелигентни мрежни системи базирани на машинско учење и распределена обработка на податоци. Во такви системи, управувачките механизми не се ограничени само на физичките процеси, туку ја опфаќаат и координацијата на алгоритамските структури, што бара нови форми на синтеза на колективна динамика.

Во поширока научна перспектива, резултатите од оваа дисертација укажуваат на потребата од понатамошно развивање на унифицирана теорија која ќе ги поврзе структурните, динамичките и информациските аспекти на сложените системи. Ваквата теорија би овозможила формулирање на нови принципи за анализа и управување со системи од голем размер, со потенцијална примена во енергетиката, транспортот, комуникациските мрежи и кибер-физичките системи.

Отворените научни прашања поврзани со скалабилноста на предложените методи, нивната робусност во услови на висока димензионалност и нивната интеграција со современи алгоритамски технологии претставуваат природна основа за понатамошни истражувања. Во таа насока, развиената теориска рамка може да се разгледува како почетна точка за формирање на поширока научна програма насочена кон системско разбирање и управување со комплексни мрежни динамички структури.

8.6 Заклучок на дисертацијата

Во оваа дисертација е развиена интегрална теоретска рамка за анализа и управување на сложени меѓусебно поврзани динамички системи, при што посебно внимание е посветено на меѓузависноста помеѓу структурните својства на мрежата и колективната динамика на системот. Истражувањето е насочено кон формализирање на условите под кои може да се обезбеди стабилност, синхронизација и координирано однесување кај системи со висока димензионалност и распределена архитектура.

Во рамките на разработената теоретска конструкција, синхронизацијата е разгледана како централна системска појава која произлегува од интеракцијата помеѓу локалната динамика на потсистемите и глобалната структурна организација. Во таа насока, концептот на динамички графови е искористен како унифицирана аналитичка алатка за интегрирано разгледување на состојбената и структурната динамика, со што се воспоставува системски мост помеѓу класичните модели на големоразмерни системи и современите мрежни парадигми.

Понатамошниот развој на истражувањето е насочен кон синтеза на структурно-променливи управувачки стратегии, при што меѓуповрзувачката структура се третира како активна управувачка променлива. Овој пристап овозможува формулирање на услови за стабилизација кои ја задржуваат модуларната организација на системот и обезбедуваат децентрализирана имплементација на управувачките закони. На тој начин се создава формална врска помеѓу тополошките својства на системот и неговата динамичка стабилност.

Во завршната фаза на истражувањето е разработен интегративно-надзорен принцип кој овозможува системска координација на распределените управувачки механизми. Овој принцип ја надградува класичната теорија на децентрализирана контрола преку воведување на координаторски механизам кој ја синхронизира работата на локалните управувачи и обезбедува глобална стабилност на колективната динамика. Со тоа се воспоставува хиерархиска управувачка структура погодна за анализа на сложени мрежни системи со временски променлива топологија.

Добиените аналитички резултати и нивната нумеричка верификација укажуваат дека предложените методи претставуваат соодветна основа за понатамошен развој на теоријата и практиката на управување со современи распределени системи. Во поширок контекст, истражувањето придонесува кон продлабочување на системското разбирање на синхронизацијата, стабилноста и координацијата кај сложени динамички структури, отворајќи можности за примена во различни инженерски и кибер-физички домени.

8.7 Литература

[1] W. Chang, H. Sang, L. Guo, L. Wu, and G. M. Dimirovski, “Integrated anti-disturbance synchronization for switched neural networks with unknown delays,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 179, Art. 114475, pp. 1–11, Mar. 2024.

- [2] C. Cui, H. Sang, Y. Zhao, P. Wang, S. Yu, and G. M. Dimirovski, "Distributed event-driven L_∞ filtering in switched delayed systems over sensor networks against switching signal attacks," *IEEE Trans. Signal Inf. Process. Netw.*, vol. 12, pp. 70–84, Jan. 2026.
- [3] G. M. Dimirovski, J. Cao, T. Ren, L. Lin, and M. J. Stankovski, "Dynamic graphs, networks-of-networks with faulty inter-network connections, pinning-control synchronization coordinator: Coincidences and confluences," *Amer. J. Biomed. Sci. Res.*, vol. 24, no. 3, pp. 295–309, Dec. 2024.
- [4] F. Li, H. Sang, P. Wang, Y. Zhao, Y. Ma, and G. M. Dimirovski, "Bumpless transfer control for synchronization of switched neutral-type neural networks with a reachable set strategy," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 35, Art. 07454, pp. 1–12, Jan. 2025.
- [5] X.-H. Liu, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, "Event-based sensor-transmission strategy for wireless networked control systems over time-varying channels," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.: Syst.*, vol. 55, no. 4, pp. 2528–2536, Apr. 2025.
- [6] Y.-W. Lv, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, "Resilient distributed localization for mobile sensor networks under malicious attacks," *Information Sciences*, vol. 724, Art. 122708, pp. 1–11, Feb. 2026.
- [7] H. Sang, W. Zheng, Y. Liu, P. Wang, and G. M. Dimirovski, "Finite-time stability and anti-disturbance synchronization for switched delayed neural networks using a ranged dwell time switching strategy," *Information Sciences*, vol. 718, Art. 122379, pp. 1–21, Jun. 2025.
- [8] Y.-P. Sun, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, "Dynamic event-triggered control for multi-channel cyber-physical systems under denial-of-service attacks," *J. Franklin Inst.*, vol. 361, no. 11, Art. 106933, pp. 1–16, Jul. 2024.
- [9] H.-X. Xie, J.-X. Zhang, Y. Jing, and G. M. Dimirovski, "Distributed model-free funnel control of nonlinear multi-agent systems with switching directions," *IEEE Trans. Signal Inf. Process. Netw.*, vol. 11, pp. 711–723, Jul. 2025.
- [10] H. Xie, J. X. Zhang, Y. Jing, G. M. Dimirovski, and J. Chen, "Self-adjustable performance-based adaptive tracking control of uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.*, vol. 22, pp. 750–764, Jan. 2025.
- [11] S. Zhu, Y. Li, J. Cao, G. M. Dimirovski, and J. Lu, "Lyapunov-type criteria of absorbing continuous-time Markov chains," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 69, no. 4, pp. 2422–2428, Apr. 2024.

Литература

- [1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [2] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.
- [3] P. J. Antsaklis and A. N. Michel, *Linear Systems*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2006.
- [4] L. Bakule, “Decentralized control: An overview,” *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 87–98, 2008.
- [5] A.-L. Barabási, *Network Science*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2016.
- [6] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, no. 4–5, pp. 175–308, 2006.
- [7] F. Bullo, J. Cortés, and S. Martínez, *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2009.
- [8] S. V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul, H. E. Stanley, and S. Havlin, “Catastrophic cascade of failures in interdependent networks,” *Nature*, vol. 464, pp. 1025–1028, 2010.
- [9] W. Chang, H. Sang, L. Guo, L. Wu, and G. M. Dimirovski, “Integrated anti-disturbance synchronization for switched neural networks with unknown delays,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 179, Art. 114475, pp. 1–11, Mar. 2024.
- [10] G. Chen and X. Dong, *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications*. Singapore: World Scientific, 1998.
- [11] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1997.
- [12] J. Cortés, “Distributed algorithms for reaching consensus on general functions,” *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 726–737, 2008.
- [13] C. Cui, H. Sang, Y. Zhao, P. Wang, S. Yu, and G. M. Dimirovski, “Distributed event-driven L_∞ filtering in switched delayed systems over sensor networks against switching signal attacks,” *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, vol. 12, pp. 70–84, Jan. 2026.
- [14] L. Dai, *Singular Control Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [15] M. Dehmer, *Structural Analysis of Complex Networks*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2011.
- [16] G. M. Dimirovski, J. Cao, T. Ren, L. Lin, and M. J. Stankovski, “Dynamic graphs, networks-of-networks with faulty inter-network connections, pinning-control synchronization coordinator: Coincidences and confluences,” *American Journal of Biomedical Science & Research*, vol. 24, no. 3, pp. 295–309, Dec. 2024.
- [17] F. Dörfler and F. Bullo, “Synchronization in complex oscillator networks: A survey,” *Automatica*, vol. 50, no. 6, pp. 1539–1564, 2014.
- [18] E. Estrada, *The Structure of Complex Networks*. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2012.
- [19] J. Fax and R. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.

- [20] L. C. Freeman, "Centrality in social networks: Conceptual clarification," *Social Networks*, vol. 1, no. 3, pp. 215–239, 1978.
- [21] J. Gao, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin, "Networks formed from interdependent networks," *Nature Physics*, vol. 8, pp. 40–48, 2011.
- [22] Z. Gong, "Decentralized robust control of uncertain interconnected systems with prescribed degree of exponential convergence," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 704–707, 1995.
- [23] Z. Gong, C. Wen, and D. P. Mital, "Decentralized robust controller design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 850–854, 1996.
- [24] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2003.
- [25] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*. New York, NY, USA: Springer, 1993.
- [26] J. P. Hespanha, "Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's invariance principle," *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 5, pp. 403–411, 2004.
- [27] M. Ikeda and D. D. Šiljak, "Decentralized stabilization of linear time-varying systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 106–107, 1980.
- [28] M. Ikeda, D. D. Šiljak, and D. E. White, "An inclusion principle for dynamic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, pp. 244–249, 1982.
- [29] M. Ilic and J. Zaborszky, *Dynamics and Control of Large Electric Power Systems*. New York, NY, USA: Wiley, 2000.
- [30] D. Kempe, J. Kleinberg, and É. Tardos, "Maximizing the spread of influence through a social network," in *Proc. ACM SIGKDD*, 2003, pp. 137–146.
- [31] J. Kleinberg, "Complex networks and decentralized search algorithms," in *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, 2007, pp. 1019–1044.
- [32] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, "Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 57, no. 1, pp. 213–224, 2010.
- [33] C. Li and G. Chen, "Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays," *Physica A*, vol. 343, pp. 263–278, 2004.
- [34] F. Li, H. Sang, P. Wang, Y. Zhao, Y. Ma, and G. M. Dimirovski, "Bumpless transfer control for synchronization of switched neutral-type neural networks with a reachable set strategy," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 35, Art. 07454, pp. 1–12, Jan. 2025.
- [35] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2004.
- [36] X.-H. Liu, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, "Event-based sensor-transmission strategy for wireless networked control systems over time-varying channels," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 55, no. 4, pp. 2528–2536, Apr. 2025.
- [37] J. Lü and G. Chen, "A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 6, pp. 841–846, 2005.

- [38] Y.-W. Lv, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, “Resilient distributed localization for mobile sensor networks under malicious attacks,” *Information Sciences*, vol. 724, Art. 122708, pp. 1–11, Feb. 2026.
- [39] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [40] P. Moylan and D. Hill, “Stability criteria for large-scale systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, pp. 143–149, 1978.
- [41] A. E. Motter, “Cascade control and defense in complex networks,” *Physical Review Letters*, vol. 93, 098701, 2004.
- [42] L. Moreau, “Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [43] A. Nedić and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
- [44] H. Nijmeijer and I. Mareels, “An observer looks at synchronization,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997.
- [45] T. Nishikawa and A. E. Motter, “Network synchronization landscape reveals compensatory structures,” *Physical Review E*, vol. 73, 065106, 2006.
- [46] R. Olfati-Saber, “Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401–420, 2006.
- [47] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [48] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [49] A. Olshevsky and J. N. Tsitsiklis, “Convergence speed in consensus,” *SIAM Review*, vol. 53, no. 4, pp. 747–772, 2011.
- [50] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 2109–2112, 1998.
- [51] M. Porfiri and D. J. Stilwell, “Consensus seeking over random weighted directed graphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1767–1773, 2007.
- [52] J. Qin, W. X. Zheng, and H. Gao, “A study of synchronization of complex networks via pinning control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 2, pp. 528–533, 2012.
- [53] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*. London, UK: Springer, 2008.
- [54] T. Ren et al., “Synchronization for multi-network with two types of inter-network coupling faults: pinning control effects,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 17, pp. 2415–2427, 2020.
- [55] H. Sang, W. Zheng, Y. Liu, P. Wang, and G. M. Dimirovski, “Finite-time stability and anti-disturbance synchronization for switched delayed neural networks using a ranged dwell time switching strategy,” *Information Sciences*, vol. 718, Art. 122379, pp. 1–21, Jun. 2025.

- [56] D. D. Šiljak, *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. New York, NY, USA: North-Holland, 1978.
- [57] D. D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems*. Boston, MA, USA: Academic Press, 1991.
- [58] D. D. Šiljak and A. Zečević, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback,” *Annual Reviews in Control*, vol. 29, no. 2, pp. 169–179, 2005.
- [59] Z. Sun and S. S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer, 2005.
- [60] Y.-P. Sun, G.-H. Yang, and G. M. Dimirovski, “Dynamic event-triggered control for multi-channel cyber-physical systems under denial-of-service attacks,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 361, no. 11, Art. 106933, pp. 1–16, Jul. 2024.
- [61] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, “Flocking in fixed and switching networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 863–868, 2007.
- [62] J. N. Tsitsiklis, “Problems in decentralized decision making,” Ph.D. dissertation, MIT, 1984.
- [63] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.
- [64] T. Wada, M. Ikeda, and E. Uezato, “Stability analysis of nonlinear descriptor systems,” in *Complex Systems*. Springer, 2022, pp. 127–141.
- [65] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, 1998.
- [66] Y. H. Wang and S.-Y. Zhang, “Robust control for nonlinear similar composite systems,” *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, vol. 147, pp. 80–84, 2000.
- [67] X. F. Wang and G. Chen, “Pinning control of scale-free dynamical networks,” *Physica A*, vol. 310, pp. 521–531, 2002.
- [68] H.-X. Xie, J.-X. Zhang, Y. Jing, and G. M. Dimirovski, “Distributed model-free funnel control of nonlinear multi-agent systems with switching directions,” *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, vol. 11, pp. 711–723, Jul. 2025.
- [69] H. Xie, J. X. Zhang, Y. Jing, G. M. Dimirovski, and J. Chen, “Self-adjustable performance-based adaptive tracking control of uncertain nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 22, pp. 750–764, Jan. 2025.
- [70] F. Xiao and L. Wang, “Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays,” *Automatica*, vol. 44, no. 10, pp. 2577–2582, 2008.
- [71] L. Xiao and S. Boyd, “Fast linear iterations for distributed averaging,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 1, pp. 65–78, 2004.
- [72] G. H. Yang, S.-Y. Zhang, and J. Lam, “Robust stability and stabilization of uncertain composite systems with circulant structures,” *Automatica*, vol. 31, pp. 5453–5458, 1996.
- [73] W. Yu, G. Chen, and M. Cao, “Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1089–1095, 2010.
- [74] J. Zhao, Y. Jing, T. Kolemisevska, and G. M. Dimirovski, “Controllability preserving decomposition of complex symmetry nonlinear systems,” *Facta Universitatis*, vol. 17, pp. 1–10, 2004.

- [75] G. Zhai, B. Hu, and K. Yasuda, “Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 329–332, 2001.
- [76] W.-S. Zhong, J. D. Stefanovski, G. M. Dimirovski, and J. Zhao, “Decentralized control and synchronization,” *Kybernetika*, vol. 45, pp. 151–167, 2009.
- [77] S. Zhu, Y. Li, J. Cao, G. M. Dimirovski, and J. Lu, “Lyapunov-type criteria of absorbing continuous-time Markov chains,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 69, no. 4, pp. 2422–2428, Apr. 2024.
- [78] A. I. Zečević and D. D. Šiljak, *Control of Complex Systems: Structural Constraints and Uncertainties*. Springer, 2010.

ЛИСТА НА НАУЧНИ ТРУДОВИ

Објавени трудови

1. B. Temelkovski, G. Dimirovski, M. Stankovski, R. Mustafovski, J. Achkoski “Intelligent Synchronization of Machine Learning Models Using Graph Neural Networks: Application to Flood Prediction” *Future Internet*, 2026.
2. B. Temelkovski, Y. Jing, M. Stankovski, G. Dimirovski, “Synchronization of XGBoost and Random Forest Algorithms for Optimizing River Level Prediction,” *TEM Journal*, 2025. DOI: 10.18421/TEM144-xx.
3. B. Temelkovski, M. Stankovski, G. Dimirovski, “Decentralized Output Control of Generalized Interconnected Descriptor Systems with Similar Structure,” *Proceedings of ETRAN 2024*, 2024.
4. B. Temelkovski, M. Stankovski, G. Dimirovski, “Synchronization of Complex Network Systems with Time Delays Using Variable Structure Control Coordinator,” *Proceedings of ETAI 2024*, 2024.

Трудови во подготовка

1. B. Temelkovski, G. Dimirovski, M. Stankovski, “Structural Evolution and Synchronizability of Complex Networked Systems via Dynamic Graph Framework,” manuscript in preparation / under review, 2026.
2. B. Temelkovski, M. Stankovski, G. Dimirovski, “Integrative Supervisory Control for Coordination of Large-Scale Interconnected Dynamic Systems,” manuscript in preparation / under review, 2026.