



УНИВЕРЗИТЕТ „Св. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ



ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ

Душко Лукарски

**РАЗВОЈ НА ПРОТОКОЛ ЗА АДАПТИВНА ДИНАМИЧКА
БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА**

– ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА –

Скопје, 2021 година

Ментор: **Проф. д-р Христина Спасевска**
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за математика и физика

Членови на комисијата: **Претседател: Проф. д-р Маргарита Гиновска**
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за математика и физика

Вонр. Проф. д-р Лихнида Стојановска - Георгиевска
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Институт за математика и физика

Вонр. Проф. д-р Томислав Станковски
Универзитет “Св. Кирил и Методиј” – Скопје
Медицински факултет
Катедра за медицинска физика

Доц. д-р Митко Вета
Eindhoven University of Technology, the Netherlands
Department of Biomedical Engineering
TU/e research group Medical Image Analysis

Дата на одбрана: _____

Дата на промоција: _____

Научна област: Метрологија

РАЗВОЈ НА ПРОТОКОЛ ЗА АДАПТИВНА ДИНАМИЧКА БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА

ДУШКО ЛУКАРСКИ

АПСТРАКТ:

Постојат повеќе методи кои овозможуваат проучување на заемнодејствата меѓу динамичките системи, меѓу кои е и методот на динамичка Баесова инференција, кој овозможува реконструкција на модел кој ги опишува заемнодејствата меѓу различни динамички системи врз база на измерени временски серии кои потекнуваат од тие системи. Притоа, временските серии мерења се сметаат за последователност на блокови информации и во секој блок се спроведува инференција на параметрите на моделот и функциите на спрега, кои ги опишуваат динамиката на системот и механизмите на заемнодејствата. Целта на оваа докторска теза е унапредување на овој метод, преку воспоставување на нов протокол за адаптивна динамичка Баесова инференција со кој се одредува временскиот прозорец со кој се спроведува инференцијата, како и параметарот на пренесување, кој одредува колкав дел од инферираната информација во тековниот блок се користи при инференцијата во следниот блок. Новиот протокол е воведен преку нумерички анализи на систем од два спрегнати фазни осцилатори и потоа тестиран на втор систем осцилатори на граничен циклус, т.е. осцилатори на Поанкаре. Новиот протокол е потоа применет при истражување на кардиореспираторните интеракции кај еден субјект при три различни шеми на респирација. Добиените функции на спрега кои го опишуваат кардиореспираторното земнодејство се анализирани, со цел утврдување на механизмите на влијание на дишењето врз срцевата работа. Притоа е утврдено дека дел од добиените резултати потврдуваат претходно познати сознанија, а дел доведуваат до нови, претходно необјавени сознанија.

КЛУЧНИ ЗБОРОВИ:

Динамички системи, динамичка Баесова инференција, адаптивна динамичка Баесова инференција, функции на спрега, спрегнати осцилатори, кардиореспираторни заемнодејства.

DEVELOPMENT OF A PROTOCOL FOR ADAPTIVE DYNAMICAL BAYESIAN INFERENCE

DUSHKO LUKARSKI

ABSTRACT:

Several methods exist that allow the study of interactions between dynamical systems, including the method of dynamical Bayesian inference, which allows for the reconstruction of a model that describes the interactions between different dynamic systems, based on measured time series originating from those systems. In this method, the time series measurements are considered as sequences of blocks of information and in each block an inference is made of the parameters and the coupling functions of the model, which describe the dynamics of the system and the mechanisms of interactions. The aim of this doctoral thesis is to improve this method, by establishing a new protocol for adaptive dynamical Bayesian inference, which determines the time window of the inference, as well as the propagation parameter, which determines how much of the inferred information in the current block is used for the inference in the next block. The new protocol was introduced through numerical analysis of a system of two coupled phase oscillators and then tested on a second system of limit cycle oscillators, i.e. Poincaré oscillators. The new protocol was then applied to the study of cardiorespiratory interactions in a single subject breathing under three different patterns of respiration. The obtained coupling functions that describe the cardiorespiratory interaction were analyzed in order to determine the mechanisms of influence of the respiration on the heart and it was found that some of the obtained results confirm previously known results, while some led to new, previously unknown conclusions.

KEY WORDS:

Dynamical systems, dynamical Bayesian inference, adaptive dynamical Bayesian inference, coupling functions, coupled oscillators, cardiorespiratory interactions.

БЛАГОДАРНОСТ

Најпрво би сакал да изразам огромна благодарност на мојот ментор, проф. д-р Христина Спасевска за нејзината несебична поддршка, безрезервна помош, водење и насочување низ моето патешествие наречено докторска дисертација. Без нејзиното лидерство изработката на овој докторски труд ќе беше целосно невозможно.

Посебна благодарност би сакал да му изразам на проф. д-р Томислав Станковски, на чија работа се заснова овој докторски труд. Неговата поддршка и насочување го овозможи моето навлегување во волшебниот свет на динамичките осцилаторни системи и нивните меѓусебни заемнодејства. Постојаната достапност за моите прашања и расположеноста за неброени дискусии, заедно со неговите совети, извршија суштинско влијание на квалитетот на оваа дисертација и научните трудови кои произлегоа од истражувачката работа. За сето ова и многу повеќе, неизмерно сум му благодарен.

Искрено се заблагодарувам и на колегите од Институтот за патофизиологија и нуклеарна медицина при Медицинскиот факултет како и од Универзитетската клиника за радиотерапија и онкологија во Скопје за нивната поддршка во текот на моите докторски студии.

И конечно, најголема благодарност должам на моето семејство кое стоички го издржа товарот на моите постојани отсуства во минатите неколку години, истовремено стимулирајќи ја мојата истрајност во текот на докторски студии преку нивната несебична грижа и љубов.

СОДРЖИНА

1. ВОВЕД	17
2. ТЕОРИСКИ ОСНОВИ ЗА САМООДРЖУВАЧКИТЕ ОСЦИЛАТОРИ	22
2.1 Граничен циклус	23
2.2 Фаза и нејзините карактеристики	25
2.3 Главни карактеристики на самоодржувачките осцилатори	29
2.4 Релаксациони осцилатори	31
2.5 Неавтономни самоодржувачки осцилатори	33
3. ФУНКЦИИ НА СПРЕГА	36
3.1 Основни концепти за функциите на спрега	38
3.1.1 Јачина и насоченост на спрегата	39
3.1.2 Пример за функција на спрега	40
3.1.3 Фазна редукција при слаби заемнодејства	42
3.1.4 Фазни функции на спрега	45
3.1.5 Амплитудни функции на спрега	47
3.1.6 Мултиваријантни функции на спрега	49
3.1.7 Воопштеност на функциите на спрега	50
3.1.8 Механизми на функциите на спрега	52
3.2 Методи за реконструкција на функциите на спрега	54
3.2.1 Моделирање преку фитување со метод на најмали квадрати	55
3.2.2 Метод на проценка на максимална сличност со повеќекратни обиди	57
3.2.3 Метод на случајно фазно ресетирање	59
3.2.4 Стохастичко моделирање на ефективни функции на спрега	60

3.3	Анализа на функциите на спрега	62
3.4	Примена на функциите на спрега	63
4.	ДИНАМИЧКА БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА	65
4.1	Декомпозиција на фазната динамика	66
4.1.1	Базни функции	66
4.1.2	Баесова инференција	68
4.1.3	Пренесување на временски променлива информација	72
4.2	Опис на заемнодејствата	74
4.2.1	Јачина и насоченост на спрегата	75
4.2.2	Реконструкција на функциите на спрега	76
4.3	Технички аспекти на динамичката Баесова инференција	77
4.3.1	Број на базни функции	78
4.3.2	Влијание на интензитетот на шумот	79
4.3.3	Временска резолуција	79
4.3.4	Веројатносна распределба на инферираните параметри	80
5.	ВОСПОСТАВУВАЊЕ НА ПРОТОКОЛ ЗА АДАПТИВНА ДИНАМИЧКА БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА	82
5.1	Одредување на временскиот прозорец	86
5.2	Одредување на параметарот на пренесување	91
5.3	Протокол за адаптивна динамичка Баесова инференција	94
6.	ПОТВРДА НА ПРОТОКОЛОТ ПРЕКУ АНАЛИЗА НА СПРЕГНАТИ ОСЦИЛАТОРИ НА ГРАНИЧЕН ЦИКЛУС	96

7. ПРИМЕНА НА ПРОТОКОЛОТ НА КАРДИОРЕСПИРАТОРНИ ЗАЕМНОДЕЈСТВА	104
7.1 Физиолошки основи на кардиореспираторните осцилации	104
7.1.1 Кардиоваскуларен систем	104
7.1.2 Ритмичност на срцевата работа	105
7.1.3 Електромеханичка активност на срцето	106
7.1.4 Респираторен систем	109
7.1.5 Осцилаторни процеси во кардиореспираторниот систем	109
7.2 Методи користени при истражувањето	111
7.2.1 Вејвлет анализа	111
7.2.2 Екстракција на фазите од мерените сигнали	112
7.3 Мерења, субјекти и сигнали	117
7.4 Резултати и дискусија	120
7.4.1 Спонтано слободно дишење	120
7.4.2 Временски променлива респирација по хармониски закон	124
7.4.3 Апериодично дишење	128
7.5 Дискусија на добиените резултати	131
8. ЗАКЛУЧОК	133
ПРИЛОГ 1 – Иницијална инференција за трите респираторни протоколи	136
ПРИЛОГ 2 – Список на објавени трудови	142
ЛИТЕРАТУРА	143

ЛИСТА НА СЛИКИ

Слика 2.1 – Осцилаторно движење и негова претстава во фазен простор: а) осцилаторната промена на променливата x , б) фазниот портрет на движењето.	23
Слика 2.2 – Полната линија го претставува граничниот циклус, а испрекинатите прикажуваат две мали пертурбации. На фазниот портрет десно е прикажано привлекувањето на траекториите во околината на граничниот циклус.	25
Слика 2.3 – Осцилаторната промена на квазилинеарниот осцилатор со времето (а) и монотоното растење на неговата фаза (б).	26
Слика 2.4 – Самоодржувачкиот осцилатор е опишан со ротација на фазната точка долж граничниот циклус. Неговите поларни координати соодветствуваат на амплитудата A и фазата ϕ на осцилациите.	27
Слика 2.5 – При пертурбација на осцилаторниот процес, пертурбацијата во амплитудата ќе се намалува сè до постигнување на вредноста на граничниот циклус, додека пертурбацијата во фазата останува непроменета.	27
Слика 2.6 – Изохрони $I(\phi)$ во близина на стабилен граничен циклус.	28
Слика 2.7 – Фаза кај самоодржувачки осцилатор со граничен циклус со произволна форма.	29
Слика 2.8 – Фазен портрет на: а) периодично движење кај конзервативен линеарен систем, б) систем со надворешен извор на енергија, в) систем со пригушување.	30
Слика 2.9 – Релаксационен осцилатор: а) бавно полнење на сад со вода, б) брзо празнење на водата од садот, по достигнување на прагот, в) по постигнување на прагот нивото на вода бргу опаѓа до нула, г) враќањето на осцилаторот во првобитната состојба соодветствува на пулс во графикот на водениот проток.	32
Слика 3.1 – Состојба на синхронизација претставена преку динамиката на фазната разлика. Во зависност од постоењето на стабилна рамнотежа, осцилаторите може да се: а) синхронизирани или б) не синхронизирани. Точките на стабилна	

рамнотежа се прикажани со празни кругови, додека точките на нестабилна рамнотежа се прикажани со полни кругови.	41
Слика 3.2 – Синхронизација кај реален систем. Празните кругови претставуваат стабилна, а полните, нестабилна рамнотежа.	41
Слика 3.3 – а) Приказ на изохроните (тенките сини линии) за една периодична орбита (кружницата). б) Влијание на мала пертурбација Δx која го поместува системот од една на друга изохрона зголемувајќи му ја фазата.	43
Слика 3.4 – Илустрација на фазна функција на спрега кога првиот осцилатор (1) влијае на вториот (2). а) Амплитудниот сигнал на првиот осцилатор за еден период. б) Функцијата на спрега во просторот $\{\phi_1, \phi_2\}$. в) Усреднета проекција на функцијата на спрега по ϕ_2 . г) Амплитудниот сигнал на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.	46
Слика 3.5 – Две карактеристични функции на спрега во фазен домен. а) Функција на спрега користена во моделот на Курамото [3]. б) Функција на спрега користена во моделот на Винфри [1, 73].	47
Слика 3.6 – Илустрација на функција на спрега за амплитудна динамика кога првиот осцилатор (1) влијае на вториот (2). а) Амплитудниот сигнал на првиот осцилатор за еден период. б) Функцијата на спрега во просторот $\{x_1, x_2\}$. в) Усреднета проекција на функцијата на спрега по x_2 . г) Амплитудниот сигнал на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.	49
Слика 3.7 – Функција на спрега одредена од фазната динамика на два Белусов-Жаботински хемиски осцилатори. Функцијата на спрега е реконструирана во однос на фазната разлика ψ	53
Слика 3.8 – Шематски приказ на процедурата за инференција на функциите на спрега: Од податоците $\mathcal{M}$ се врши проценка на променливите $\tilde{\mathcal{M}}$ потребни за спроведување на инференцијата (на пример фазите или амплитудите), потоа се инферира динамичкиот модел и од таа инференција се добиваат функциите на спрега.	54
Слика 3.9 – Реконструирани функции на фазни заемнодејства. а) Функцијата на спрега за влијанието од вториот врз првиот осцилатор. б) Функцијата на спрега за влијанието од првиот врз вториот осцилатор.	57

- Слика 3.10 – Инференција со користење на методот на случајно фазно ресетирање. Прикажана е функцијата на спрега во однос на фазната разлика $\psi_{42} = \phi_2 - \phi_4$ 60
- Слика 3.11 – Функции на спрега кај осцилации побудени од шум во моделот на Фиц Хју - Нагумо за два различни интензитети на шумот. 62
- Слика 4.1 – Инференција на временски променлив параметар со голем градиент од спрегнати осцилатори во присуство на шум опишани со равенката 6.1. Сивата линија ја покажува вистинската промена на параметарот, додека црната ја покажува инферираната вредност: а) потполно пренесување на коваријансната матрица, б) без пренесување на коваријансната матрица, в) пренесување на коваријансната матрица според методот на ДБИ. 73
- Слика 4.2 – Шематски приказ на функција на спрега како функција од фазната разлика на осцилаторите: а) полната линија е за случај во отсуство на синхронизација, а испрекинатата е при синхронизација. Празниот круг одговара на стабилна, а полниот на нестабилна рамнотежа; б) зависноста на функцијата на спрега од двете променливи. 76
- Слика 4.3 – Функции на густина на распределба на веројатноста за инферирани параметри од моделот опишан со равенките 4.25 во отсуство на временска променливост: а) Гаусов облик на распределбата на инферираната фреквенција ω_1 , б) биваријантна дистрибуција на два параметра на спрега, в) биваријантна дистрибуција на два параметри на фреквенција. 81
- Слика 5.1 – Шематски приказ на секвенцијална инференција со временски прозорец t_w 82
- Слика 5.2 - Типичен изглед на зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец и параметарот на пренесување за спрегнати фазни осцилатори опишани со равенката (5.1). а) Средна вредност на коваријансната матрица за сите блокови на инференцијата, со исклучок на првите два блока. б) Коваријансната матрица за инференцијата од последниот блок. 86
- Слика 5.3 – Зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец за две различни вредности на параметарот на пренесување. 87
- Слика 5.4 – Режим на одложена инференција - комбинациите на параметрите t_w и p_w кои ја позиционираат инференцијата лево од максимумот на кривата $Q_\Sigma = Q_\Sigma(t_w)$ не овозможуваат инференцијата да ја достигне амплитудата на промени на временски променливиот параметар. На сликата е даден приказ на

временските промени на параметарот ω_1 . Инферираната вредност $\omega_{1,inf}$ е означена со сина боја, а вистинската вредност на параметарот $\omega_{1,true}$ со црвена боја.	88
Слика 5.5 – Приказ на параметарот ω_1 при негови периодични промени со период $T=66$ s; а) инференција со временски прозорец со $t_w = 5$ s, б) инференција со временски прозорец со $t_w = 30$ s. Преголемо времетраење на блокот на инференција оневозможува соодветно следење на временските промени на параметрите.	89
Слика 5.6 – а) Иницијално инферираните параметри од системот прикажан со равенките (5.1), б) брзи Фурие трансформации од иницијално инферираните параметри, соодветно.	90
Слика 5.7 – Зависност на коваријансната матрица од параметарот на пренесување за различни вредности на временскиот прозорец.	91
Слика 5.8 – Типичен пример за зависноста на средната квадратна грешка од параметарот на пренесување при оптимална вредност на временскиот прозорец.	92
Слика 5.9 – Типичен пример за зависноста на оптималниот параметар на пренесување од максималната фреквенција на промени на параметрите. Зависноста на коефициентот на правец од квадратурата на шумот, а), како и зависноста на отсечокот од квадратурата на шумот, б), можат приближно да се опишат со инверзна степенска функција.	93
Слика 6.1 – Типичен изглед на зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец и параметарот на пренесување за спрегнати осцилатори на Поанкаре опишани со равенките (6.2). а) Средна вредност на коваријансната матрица за сите блокови на инференцијата, со исклучок на првите два блока. б) Коваријансната матрица за инференцијата од последниот блок.	97
Слика 6.2 – Зависност на коваријансната матрица од временскиот прозорец за две различни вредности на параметарот на пренесување, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре.	99
Слика 6.3 – Зависност на коваријансната матрица од параметарот на пренесување за четири различни вредности на временскиот прозорец, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре.	99

Слика 6.4 – Влијание на временскиот прозорец врз опишувањето на временската променливост, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре; а) мал, б) голем и в) оптимален временски прозорец.	100
Слика 6.5 – Иницијална инференција на параметрите од систем спрегнати осцилатори на Поанкаре. На сликата се прикажани само четирите параметри од интерес; а) инферирани параметри, б) брза Фурие трансформација со Матлаб на соодветните инферирани параметри.	101
Слика 6.6 – Типичен пример на зависноста на средната квадратна грешка меѓу четирите инферирани параметри и нивните вистински вредности како функција од параметарот на пренесување, при оптимален временски прозорец.	102
Слика 6.7 – Оптималниот параметар на пренесување како функција од максималната фреквенција на промена на параметрите и од квадратурата на инферираниот шум за спрегнати фазни и спрегнати осцилатори на Поанкаре.	103
Слика 7.1 – ЕКГ сигнал со карактеристичните врвови.	108
Слика 7.2 – Графички приказ на Морлет вејвлет.	111
Слика 7.3 – Одредување на моментална фаза од ЕКГ сигнал: а) ЕКГ сигнал со означени максимуми на ер врвот, б) фазата добиена според равенката 7.5 од дадениот сигнал, в) дводимензионална претстава на Хилбертовиот трансформ од сигналот, г) фазата реконструирана со помош на равенките 7.6 и 7.7.	114
Слика 7.4 – Компјутерска симулација која ја следи субјектот со цел дишење по предодредена респираторна шема.	118
Слика 7.5 – Приказ на позиционирањето на мерните сонди на Биопак опремата: а) појас за респирација поставен на градите на субјект, б) ЕКГ со три електроди.	119
Слика 7.6 – Кардиореспираторна интеракција при спонтано дишење: а) респираторниот сигнал, б) вејвлет трансформот на респираторниот сигнал, в) ЕКГ сигналот, г) вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот.	121
Слика 7.7 – Иницијалната инференција за случај на спонтано слободно дишење. На горните слики се прикажани најзначајните параметри, додека на долните се нивните соодветни брзи Фурие трансформации.	122

- Слика 7.8 – Резултати за влијанието на спонтано слободно дишење врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличност на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за целата временска серија. 123
- Слика 7.9 – Кардиореспираторна интеракција при временски променлива респирација која следи синусен закон: а) респираторниот сигнал, б) вејвлет трансформот на респираторниот сигнал, в) ЕКГ сигналот, г) вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот. 125
- Слика 7.10 – Иницијалната инференција за случај на контролирана респирација по хармониски закон. На горните слики се прикажани најзначајните параметри, додека на долните се нивните соодветни брзи Фурие трансформации. 126
- Слика 7.11 – Резултати за влијанието на периодичната респирација по хармониски закон врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличноста на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за временската серија. 127
- Слика 7.12 – Временски променливата природа на респираторните мерења при аperiодичното дишење: а) респираторниот сигнал при контролирано дишење чија фреквенција следи аperiодичен закон, б) вејвлет трансформот при аperiодично дишење. 128
- Слика 7.13 – Иницијалната инференција за случај на контролирана респирација по аperiодичен закон. На сликите се прикажани најзначајните параметри и нивните соодветни брзи Фурие трансформации. 129
- Слика 7.14 – Резултати за влијанието на аperiодичната респирација врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличноста на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за временската серија. 130
- Слика 7.15 – Усреднетите функции на спрега при слободно дишење, респирација по синусен закон и респирација по аperiодичен закон. 132

ЛИСТА НА ТАБЕЛИ

Табела 3.1 – Вообичаено користени функции на спрега	51
Табела 7.1 - Интервали на фреквенции за различните осцилаторни процеси во кардиореспираторниот систем	110

ЛИСТА НА КОРИСТЕНИ КРАТЕНКИ

Кратенка	Значење
ДБИ	Динамичка Баесова инференција
аДБИ	Адаптивна динамичка Баесова инфереција
ОДР	Обични диференцијални равенки
РСА	Респираторна синусна аритмија
FFT	Fast Fourier Transformation, функција во Матлаб
MSE	Mean Square Error, функција во Матлаб
CO ₂	Јаглероден диоксид
ЕКГ	Електрокардиограм
BCP	Варијабилност на срцевата рата

1. ВОВЕД

Динамичките системи се системи чија состојба се менува со текот на времето. Нивното опишување во физиката се врши преку користење на диференцијални равенки во кои се застапени изводи по времето. Концептот на динамички систем потекнува уште од класичната Њутнова механика, во која еволуцијата на системот се прикажува преку некоја равенка која ја опишува промената на состојба на системот во многу краток временски интервал. Еволуцијата во времето се следи преку итеративна примена на оваа равенка во секој следен мал временски интервал, процес означен како интегрирање на системот. Доколку системот е интегрибилен, односно може да се реши, преку неговото интегрирање при познати почетните услови ќе може да се одредат следните состојби на системот. Еден таков пример е решавањето на равенката на движење, преку која се добива множество точки кои ја опишуваат состојбата на движењето, наречено траекторија на движењето.

Теоријата на динамичките системи наоѓа широка примена во најразлични полиња на научен интерес како што се математиката, физиката, хемијата, биологијата и медицината, па дури и во економијата и други општествени науки. Динамичките системи се широко распространети во природата и најчесто не се изолирани, туку заемнодејствуваат со други системи и со опкружувањето во кое се наоѓаат, при што разменуваат информации и материја [1-5].

Теориското разгледување на динамичките системи до пред дваесетина години главно беше фокусирано на автономните динамички системи. Од математички аспект, автономните системи се опишуваат со системи обични диференцијални равенки (ОДР) кои експлицитно не зависат од независна променлива. Поинаку кажано, кај автономните системи, законот кој што ја опишува еволуцијата на системот зависи само од неговата моментна состојба. Доколку законот што ја опишува еволуцијата на системот не зависи само од моментната состојба на системот туку и од дополнителен параметар (независна променлива), таквиот систем претставува неавтономен систем. Земајќи ја во предвид термодинамичката отвореност на системите во природата, интуитивно е јасно дека најголем дел од појавите во природата ќе бидат опишани со неавтономни системи. Сепак, во физиката, каде што најчесто независната променлива која е вклучена во опишувањето на системите е времето, многу од појавите можат да се третираат како автономни системи, со имплицитно вклучена претпоставка за непроменливост на природните закони. Дури во последните дваесетина години се развиваат теории за проучување на неавтономните динамички системи, кои овозможуваат подобро опишување на природните појави и овозможуваат увид и теориско разгледување на нови феномени кои остануваат скриени при апроксимациите на неавтономните со автономни системи [6-8]. Доколку ваквите системи ги набљудуваме директно, теоретски преку соодветните равенки, тие се

неавтономни. Меѓутоа, доколку работиме на инверзен проблем, со методолошки детекции од податоци, таквите системи се сметаат за автономни системи кои еволуираат во времето.

Значајна група неавтономни динамички системи се биолошките динамички системи. Тие разменуваат материја и енергија со нивната средина и со други системи од нивното опкружување. Постојат голем број примери каде што е потребно, при проучување на нивната временската еволуција, биолошките системи да се сметаат за динамички системи. Вакви примери се среќаваат почнувајќи од најниското, молекуларно ниво, преку популации на клетки, ткива, органи, па сè до целокупни органски системи и организми. Надворешните влијанија врз овие системи се временски променливи, поради што тие треба да се сметаат за неавтономни динамички системи [9-11].

Физиолошките системи на човекот, кои и самите се дел од биолошките динамички неавтономни системи, сочинуваат еден од главните предмети на проучување во оваа теза. Различните физиолошки системи ја одразуваат функцијата на човековите органи и процеси во телото и нивното истражување е од огромен интерес за медицината, биофизиката и биомедицинските науки, бидејќи доведува до осознавање на различните физиолошки состојби и развој на третмани на патолошките состојби и болести [12-17].

Истражувањата во оваа теза се насочени кон осцилаторните системи во природата [18] и поконкретно во човековиот организам, кои во голема мера се неавтономни. Анализата на мерењата на овие осцилаторни системи може да се искористи за добивање на сознанија за самите осцилаторни системи, дури и кога системите и нивните меѓусебни влијанија не се однапред познати. Двата осцилаторни система во човековиот организам кои се од посебен интерес за оваа теза се кардиоваскуларниот и респираторниот систем. Кардиореспираторното заемнодејство, како еден од централните механизми на кардиоваскуларниот систем, е интензивно проучувано во литературата од аспект на различните состојби и болести како што се стареењето на човекот, РСА, постоперативни состојби, хипертензија, некои невропатолошки болести (шизофренија) и друго [19-32, 44].

И кардиолошкиот и респираторниот сигнал може да се добијат со неинвазивни мерења што ги прави кардиореспираторните мерења релативно едноставни и достапни. Двата система се карактеризираат со периодична осцилаторна динамика, поради што е овозможено нивното моделирање преку нивната фазна динамика [29-33].

Слично како и кај другите отворени биолошки системи, динамиката на кардиореспираторниот систем може да биде временски променлива, при што и фреквенцијата на осцилаторните процеси и јачините на спрегите меѓу системите може да бидат временски променливи, што доведува до дополнителна комплексност при анализата на мерењата. Досега, во литературата се објавени истражувања кои разгледуваат различни аспекти на кардиореспираторните интеракции, како што се фазна синхронизација, јачина

на кардиореспираторните спреги, насоченост на кардиореспираторните спреги, функции на спрега и друго [29-36].

Од посебен интерес за оваа теза се функциите на спрега кои го опишуваат функционалниот механизам на појава и развој на заемнодејствата со времето. Заемнодејствата се одредени од два главни аспекти: структура и функција. Структурниот аспект ги одредува врските и комуникацијата меѓу системите, односно топологијата на мрежата, додека функционалниот аспект ги дефинира закономерностите кои ги следат дејствијата меѓу системите и нивната заедничка еволуција. Функционалните механизми може да доведат до најразлични квалитативни промени во системите. Во зависност од функциите на спрега, резултантната динамика може да доведе до појава на цела плејада состојби, физички ефекти, феномени и карактеристики како што се синхронизација, осцилаторна и амплитудна смрт, раѓање на осцилации, коегзистирачки фази, фрактални димензии итн. Сознанијата за ваквите функционални механизми може да се искористат за детекција, креирање или предвидување на некој одреден физички ефект, а кај живите системи и за проценка на здравствената состојба и одредување на промените при различните болести. Во последно време, функциите на спрега привлекуваат значително внимание во научната јавност и постојат голем број научни трудови кои ги разгледуваат новите аспекти на механизмите на заемнодејствата во повеќе научни полиња [37-44].

Постојат повеќе методи за реконструкција на функциите на спрега од спроведените мерења. Овие методи се основа на различни техники на инференција како што се фитување со метод на најмали квадрати и измазнување на кернели [27, 45], динамичка Баесова инференција [30, 31, 46], методи на најголема сличност [47], стохастично моделирање [48] и фазно ресетирање [49-51]. Од интерес на оваа теза е методот на динамичка Баесова инференција (ДБИ) за временски променлива динамика во присуство на шум [30, 31, 46, 52, 53]. Во контекст на овој метод, динамичка инференција се однесува на постапка при инференција на моделот кој опишува решение на систем диференцијални равенки, преку анализи на временски серии добиени од мерења.

Кога два осцилатори заемнодејствуваат доволно слабо, нивното движење вообичаено се апроксимира со нивната фазна динамика [3, 54]. Ако фазите на системите се опишат како генеричка монотона промена на променливите, за секој од осцилаторите динамичкиот процес ќе може да се прикаже како збир од фазната брзина, функцијата на спрега со другиот осцилатор и шумот. Методот претпоставува дека шумот е бел Гаусов шум, што го прави моделот да е стохастичен систем претставен со ОДР. Поради периодичното поведение на системот, тој може да се претстави со развој во Фуриеов ред, при што за опишување на динамиката се земаат конечен број на Фуриеови членови. На тој начин, главната задача се состои во инферирање на коефициентите пред Фуриеовите членови и на шумот. За дадена временска серија набљудувани фази, Баесовата статистика овозможува утврдување на постериорната густина преку користење на претходната густина и функција на сличност. При ДБИ се прават извесни почетни претпоставки за

параметрите на моделот кој ги опишува набљудуваните временски серии. Потоа, следствено се применува Баесовата теорема, при што во секој следен чекор на инференцијата, инферираните параметри на моделот се сè поблиски до нивните вистински вредности. Во секој чекор на инференцијата се добива вредност на концентрационата матрица, која е инверзна на коваријансната матрица. Вака добиената коваријансна матрица претставува индикатор за квалитетот на инференцијата.

При користење на методот, временските серии на фазите на осцилаторите се добиваат преку мерења и нивна обработка. Временските серии може да се сметаат како временски секвенци на блокови од примероци. Секој блок ги вклучува примероците од одреден временски интервал, па затоа времетраењето на блокот го одредува временскиот прозорец. За секој блок се спроведува Баесовата инференција и се добиваат вредностите на параметрите на моделот и на спрегите на осцилаторите. Излезните вредности од претходниот блок се користат како влезни вредности за инферирањето во тековниот блок. Колкав дел од добиената информација во претходниот блок ќе се искористи при инференцијата во тековниот блок одредува втор параметар, наречен параметар на пренесување на коваријансната матрица.

Во методот на ДБИ овие два параметри - временскиот прозорец и параметарот на пренесување се избрани произволно, врз база на искуство на истражувачот. Целта на оваа теза е да се предложи протокол за адаптивна динамичка Баесова инференција (аДБИ), во кој ќе се врши адаптивно одредување на вредностите на овие два параметри со цел оптимизирање на инференцијата на параметрите на моделот и шумот. Протоколот е воспоставен преку нумерички анализи на познати спрегнати фазни осцилатори, а потоа е тестиран со помош на нумерички анализи на спрегнати осцилатори на граничен циклус. По воспоставувањето на протоколот, истиот е искористен за анализа на кардиореспираторните интеракции, при што е проучувано влијанието на различни шеми на контролирана респирација врз кардиореспираторните функции на спрега. За временско-фреквентната анализа на добиените сигнали од мерењата се користени и методите на вејвлет анализата [55, 56]. Конечно, при дискусијата на добиените функции на спрега, јачината на спрегите, како и сличноста меѓу функциите на спрега при нивната временска еволуција, е направена споредба на добиените резултати при истражуваните респираторни шеми со резултатите кои се веќе публикувани [24, 27, 57-60].

Тезата е организирана на следниот начин.

Во втората глава се презентирани теориските основи на самоодржувачките осцилаторни системи. Разработени се основните поими за граничен циклус и за фазата во нелинеарната динамика, заедно со нејзините карактеристики, како и главните карактеристики на самоодржувачките осцилатори. Дискутирани се релаксационите осцилатори и дадени се воведни формулации за неавтономните системи.

Во третата глава е даден детален преглед на концептите и теоријата за временски променливите функции на спрега. Презентирани се основните концепти за нив, постојните методи за нивна реконструкција, како и различните полиња на нивна примена.

Во четвртата глава е детално изложен методот за ДБИ кој се унапредува со оваа теза. Дискутирано е за декомпозицијата на фазната динамика, начините за опишување на заемнодејствата меѓу системите кои се проучуваат, како и за техничките аспекти на ДБИ.

Во петтата глава се дадени резултатите од нумеричките анализи на систем од два познати спрегнати фазни осцилатори врз основа на кои е воспоставен протоколот за аДБИ. Протоколот се темели на анализите кои доведуваат до алгоритми за одредување на временскиот прозорец и параметарот на пренесување при инференцијата.

Потоа, во шестата глава е опишана проверката на валидноста на протоколот, преку анализа на втор систем однапред познати спрегнати осцилатори – осцилатори на граничен циклус, односно осцилатори на Поанкаре. Преку нумеричките анализи на постапката за одредување на временскиот прозорец и параметарот на пренесување се верификува применливоста на протоколот и на други осцилаторни системи.

Во седмата глава е презентирана примената на протоколот при истражување на кардиореспираторните заемнодејства. Најнапред е даден краток вовед во физиолошките основи на кардиореспираторните осцилации, а потоа се опишани и методите кои се користат при истражувањето. Потоа се презентирани мерењата направени за истражување на кардиореспираторните интеракции при различни контролирани шеми на респирација на еден субјект, како и добиените резултати од примена на протоколот. Добиените резултати се дискутирани со акцент на проучување на добиените функции на спрега и нивната интерпретација во насока на опишување на механизмите на заемнодејствата.

Конечно, во последната глава се резимирани анализите од добиените резултати и изведени заклучоци. Во неа се исто така поставени и идните насоки на истражување кои произлегуваат од добиените резултати.

2. ТЕОРИСКИ ОСНОВИ ЗА САМООДРЖУВАЧКИТЕ ОСЦИЛАТОРИ

Класичен начин на воведување во теоријата на самоодржувачките осцилатори е преку разгледување на часовник со нишало [4, 61]. Во него има механички механизам кој ја претвора потенцијалната енергија на некој тег, пружина или батерија во осцилаторно движење на нишалото. Потоа ваквото осцилаторно движење се претвора во ротационо движење на стрелките на часовникот. Независно од конкретниот дизајн на механизмот, негова главна карактеристика од интерес е дека тој црпи енергија од некој извор и ја користи за одржување на постојаното осцилирање на нишалото. Точната форма на осцилаторното движење е целосно одредена од некои внатрешни параметри на часовникот и не зависи од начинот како е нишалото придвижено. По почетната пертурбација на нишалото, преку некој краткотраен привремен процес тоа го воспоставува својот внатрешен ритам.

Ваквите карактеристики се среќаваат и кај други осцилаторни процеси со најразлична природа. Објектите или системите кои осцилираат на ваков начин се означени како самоодржувачки осцилатори. Во природата има бројни примери на вакви самоодржувачки осцилатори, почнувајќи од електронски кола за генерирање радио-фреквентни сигнали, ласери, осцилаторни хемиски реакции како што е реакцијата на Белусов-Жаботински, пејсмејкерот на срцето (синусниот јазол), вештачки пејсмејкери итн.

Трите главни одлики на самоодржувачките осцилаторни системи се следните. Прво, ваквите системи се активни системи кои вклучуваат внатрешен извор на енергија која се претвора во осцилаторно движење. Внатрешниот извор на енергија е неопходен за надокнадување на енергијата потрошена за совладување на различните видови отпор при движењето. Доколку е системот изолиран, осцилаторните промени продолжуваат сè до истрошување на изворот на енергија. Кажано на јазикот на математиката, системот претставува автономен динамички систем, без експлицитна зависност од времето. Ваквите системи во физиката се опишуваат со нелинеарни модели. Второ, обликот на осцилациите е одредена од параметрите на системот и не зависи од начинот на придвижување на системот. И трето, осцилаторниот процес е стабилен при мали пертурбации, т.е. при мали надворешни влијанија, по кратко време, обликот на осцилациите самостојно се враќа во првобитниот.

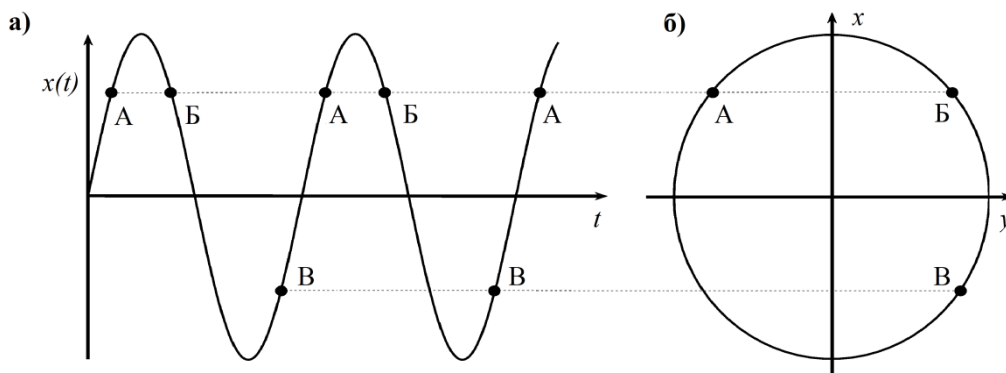
Самоодржувачките осцилаторни системи се дел од поширока класа системи наречени динамички системи. Динамичките системи во себе ја содржат идејата за детерминистичко одредено движење, имплицитно вклучувајќи ја претпоставката дека доколку е позната состојбата на системот во некој момент од времето, тогаш состојбата на тој систем може еднозначно да се одреди во било кој друг момент од времето. Динамичките системи се идеализирани модели кои не ги вклучуваат природните

флуктуации на параметрите на системот и останатите извори на шум кои неминовно се среќаваат при проучување на реалните системи.

2.1 Граничен циклус

Да разгледаме самоодржувачки осцилаторен систем кој како излез генерира периодичен процес. Вредноста на овој периодичен процес ја означуваме со променливата $x(t)$. Оваа вредност може да соодветствува на моментниот агол кој го зафаќа нишалото на часовникот со вертикалната замислена оска, или на електричната струја низ отпорникот на генераторот на вакуумска цевка или интензитетот на светлината во ласерот или на било која друга осцилирачка величина. Доколку целта ни е да ја опишеме состојбата на осцилаторот во даден момент од времето, не е доволно да ни е позната вредноста на x , бидејќи за иста вредност на x , процесот може да се забрзува или да се забавува. Затоа, за еднозначно опишување на системот неопходни се повеќе променливи. Бројот на променливи неопходни за опишување на конкретен динамичен систем се нарекува димензија на динамичкиот систем. Во наједноставен случај доволни се две променливи, x и y . За часовникот со нишало тоа би биле, на пример, аголот кој нишалото го зафаќа со вертикалната замислена оска и аголната брзина на нишалото. На ваков начин, однесувањето на системот ќе биде целосно опишано преку временската еволуција на парот (x, y) .

Ваквите променливи претставуваат координати во таканаречениот фазен простор, а кривата на зависноста на променливата $y(t)$ од променливата $x(t)$ се нарекува фазен портрет на системот. Точката од фазниот портрет со координати (x, y) се нарекува фазна точка. Бидејќи осцилаторниот процес периодично се повторува со период T , кривата $y(x)$ соодветствува на затворена крива во фазниот простор која се нарекува граничен циклус. Ова е прикажано на сликата 2.1. Притоа, на сликата 2.1 а) е прикажана временската осцилаторна промена на променливата x , долж која се означени три точки, А, Б и В.



Слика 2.1 – Осцилаторно движење и негова претстава во фазен простор: а) осцилаторната промена на променливата x , б) фазниот портрет на движењето.

Поради периодичноста на осцилаторното движење, состојбите $x(t)$ и $x(t+T)$ се еквивалентни и означени со иста буква. На фазниот портрет тие состојби ќе бидат претставени со една точка, како што е прикажано на сликата 2.1 б). Точките А и Б, иако имаат иста вредност за променливата x , поради различната вредност на втората променлива, y , на фазниот портрет се претставени со различни фазни точки. Од друга страна, точките Б и В имаат приближно иста вредност за променливата y , но различни вредности за променливата x .

Фазниот портрет за непригушениот квазилинеарен хармониски осцилатор е кружница. Равенката која го опишува ваквиот осцилатор е:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.1)$$

а решението на оваа диференцијална равенка е дадено со:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (2.2)$$

Во равенките (2.1) и (2.2), величината ω_0 е аголната фреквенција која е поврзана со периодот T на осцилациите со равенката $\omega_0 = 2\pi/T$ и треба да се разликува од фреквенцијата на осцилациите $f_0 = 1/T$. Интензитетот на осцилациите е одреден од амплитудата A , додека вредноста $\phi = \omega_0 t + \phi_0$ се нарекува фаза.

Со диференцирање на равенката (2.2) ја добиваме брзината на осцилаторот:

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad (2.3)$$

од каде што се добива дека:

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + x^2 = A^2, \quad (2.4)$$

што претставува равенка на кружница во фазниот простор (x, y) , каде што величината $y = \dot{x}/\omega_0$. Со ваквата замена на брзината $\dot{x}$ со нова променлива y , равенката 2.1 се трансформира во

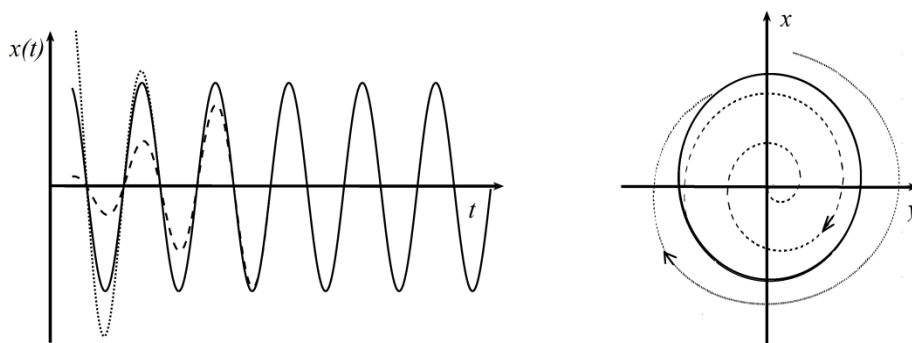
$$\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (2.5)$$

со чија генерализација се доаѓа до диференцијална равенка од прв ред која претставува основна равенка на многу теории на нелинеарната динамика на дисипативните системи:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)). \quad (2.6)$$

За целосно илустрирање на идејата за граничниот циклус, ќе разгледаме како се однесуваат траекториите во негова близина. Ќе разгледаме што се случува кога осцилаторниот систем кој е претставен во фазниот простор подлежи на некоја мала

пертурбација, што соодветствува на изместување на фазната точка од граничниот циклус. Суштината на самоодржувачките осцилатори се состои во тоа што по воведувањето на малата пертурбација во нивното движење, за кратко време по пертурбацијата, осцилаторите самостојно, повторно ја воспоставуваат првобитната периодичност. Во фазниот простор тоа се сведува на враќање на фазната точка на граничниот циклус. Истовремено тоа значи дека периодичноста на осцилаторното движење не зависи од почетните услови, т.е. од начинот како осцилаторот е придвижен. Во фазниот простор тоа значи дека независно каде што и да е поставена фазната точка на почеток, нејзината траекторија ќе биде привлечена кон граничниот циклус. По извесно транзитивно време системот ќе почне да осцилира со периодичност која соодветствува на движењето на фазната точка долж граничниот циклус. Ваквото поведение е прикажано на сликата 2.2. Граничниот циклус ги привлекува фазните траектории и затоа се нарекува атрактор на динамичкиот систем.



Слика 2.2 – Полната линија го претставува граничниот циклус, а испрекинатите прикажуваат две мали пертурбации. На фазниот портрет десно е прикажано привлекувањето на траекториите во околината на граничниот циклус.

Самоодржувачките осцилаторни системи можат да се опишат со помош на нивната слика во фазниот простор - граничниот циклус. Формата на циклусот, која всушност соодветствува на формата на осцилациите, е целосно одредена од внатрешните параметри на системот. Ако осцилациите се блиски до синусна форма, осцилаторот е наречен квазилинеарен или квазихармониски. Во таков случај граничниот циклус има форма блиска на кружница. Силно нелинеарни системи може да имаат осцилации со сложени форми и во тој случај и граничниот циклус ќе има сложена форма.

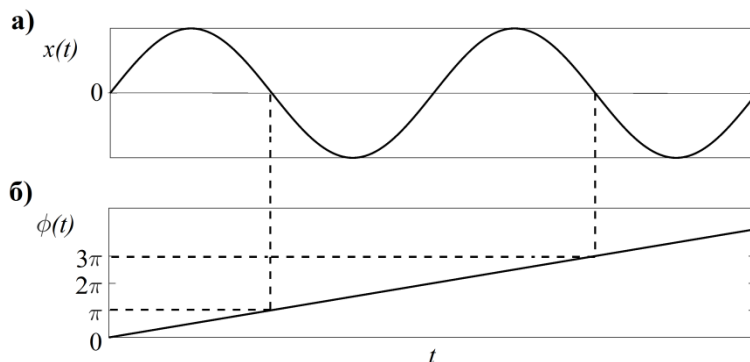
2.2 Фаза и нејзините карактеристики

Концептот на фаза, споменат во аргументот на синусната функција од равенката (2.2) е еден од клучните концепти при разгледување на самоодржувачките осцилатори. За да ги илустрираме неговите карактеристики, ќе разгледаме случај на квазилинеарен

осцилатор опишан со таа равенка. Како што видовме, граничниот циклус на квазилинеарен осцилатор е речиси кружница, а самите осцилации можат да се опишат со синусен закон во кој аргументот $\phi = \omega_0 t + \phi_0$ е наречен фаза.

Најпрво ќе напомниме дека терминот „фаза“ може да се користи со различна смисла. Имено, веќе зборувавме за поимот на фазен простор, каде што координатите одредуваат таканаречена фазна точка и движењето на оваа фазна точка ја одредува временската еволуција на системот кој е претставен во фазниот простор. Во фазниот простор, како и во концептот на таканаречените фазни премини, смислата на терминот фаза е напoлно различен од идејата за фаза на осцилациите како што е дефинирана во претходниот пасус.

Фазата на осцилациите неограничено расте, но, бидејќи синусната функција е периодична $\sin \phi = \sin(\phi + 2\pi)$, две фази кои се разликуваат за 2π ќе соодветствуваат на иста физичка состојба. Ова е илустрирано на сликата 2.3.

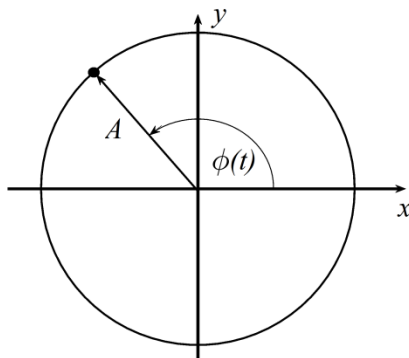


Слика 2.3 – Осцилаторната промена на квазилинеарниот осцилатор со времето (а) и монотоното растење на неговата фаза (б).

Величината ϕ_0 во равенката (2.2) може да се смета за почетна фаза. Веќе дискутиравме дека за самоодржувачки осцилатор, независно од почетната состојба, по извесно транзитивно време осцилаторот го достигнува граничниот циклус. Тоа значи дека амплитудата на осцилациите не зависи од почетните услови. Од почетната фаза зависи само преминот кон граничниот циклус, па затоа, при проучување на осцилаторното движење почетната фаза може да биде произволна, т.е. сите вредности за почетната фаза ϕ_0 се еквивалентни.

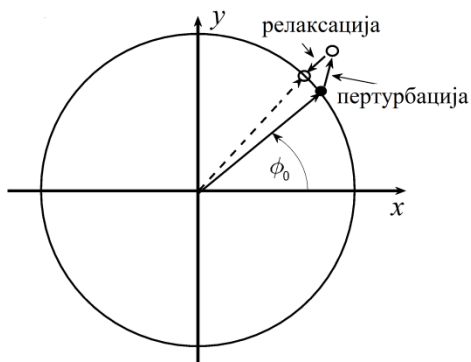
Интерпретацијата на амплитудата и фазата на осцилаторот на фазниот портрет е прикажана на сликата 2.4. Бидејќи фазниот портрет на квазилинеарниот осцилаторен систем е речиси кружница, амплитудата и фазата на системот се всушност поларните координати на фазната точка. Оваа точка ротира со аголна брзина ω_0 , па за време од еден

период T на осцилациите, фазната точка прави една ротација околу центарот, а фазата на осцилациите се зголемува за 2π .



Слика 2.4 – Самоодржувачкиот осцилатор е опишан со ротација на фазната точка долж граничниот циклус. Неговите поларни координати соодветствуваат на амплитудата A и фазата ϕ на осцилациите.

За да ги дискутираме карактеристиките на фазата, поведението на осцилаторниот систем ќе го разгледуваме во координатен систем кој ротира спротивно од насоката на стрелките на часовникот со иста аголна брзина ω_0 со која што се движи фазната точка во оригиналниот координатен систем. За набљудувач во новиот референтен систем фазната точка ќе биде неподвижна т.е. стационарните осцилации ќе соодветствуваат на точка во мирување со координати $\phi - \omega_0 t = \phi_0$ и A (слика 2.5).

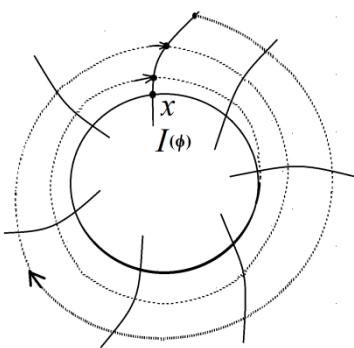


Слика 2.5 – При пертурбација на осцилаторниот процес, пертурбацијата во амплитудата ќе се намалува сè до постигнување на вредноста на граничниот циклус, додека пертурбацијата во фазата останува непроменета.

Доколку осцилаторниот систем е пертурбиран, тоа ќе може да се опише со поместување на фазната точка од граничниот циклус (слика 2.5). Со текот на времето пертурбацијата во амплитудата на осцилаторниот процес ќе се намалува сè до постигнување на вредноста од граничниот циклус (слика 2.2), додека пертурбацијата во фазата ниту ќе се зголемува, ниту ќе се намалува. Како што видовме, бидејќи сите

вредности на ϕ_0 се еквивалентни, ако почетната фаза се промени од вредноста ϕ_0 на вредноста ϕ_1 , таа ќе ја задржи новата вредност сè до следна пертурбација на системот.

Една од главните идеи е одредувањето на фазата да важи не само за граничниот циклус, туку и за неговата околина. За таа цел во близина на граничниот циклус се дефинираат таканаречени изохрони [1, 3, 4]. Ако динамичкиот систем се разгледува стробоскопски, со временски интервал кој е точно еднаков на периодот на граничниот циклус T , тогаш може да се дефинира мапирање $x(t) \rightarrow x(t + T) \equiv \phi(x)$ за кое сите точки на граничниот циклус се фиксни, а сите точки во близина на циклусот се привлечени од нив. За N димензионален систем, за секоја точка од граничниот циклус x , точките од нејзината околина кои се привлечени од неа формираат $N-1$ димензионална хиперповршина I , наречена изохрона, која го сече граничниот циклус во точката x , што е прикажано на слика 2.6. Ваква изохрона може да се конструира за секоја точка од циклусот и на тој начин може да се изврши параметризација на хиперповршините по фазата $I(\phi)$. Со тоа, преку барањето за константност на фазата на секоја изохрона $I(\phi)$, се врши проширување на дефиницијата на фазата и на околината на граничниот циклус каде што постојат вакви изохрони.



Слика 2.6 – Изохрони $I(\phi)$ во близина на стабилен граничен циклус.

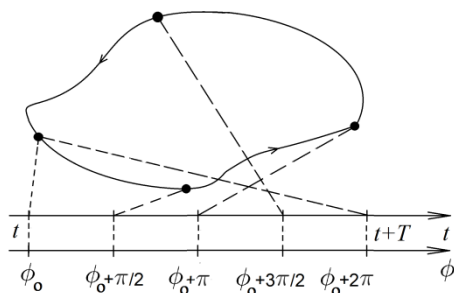
За граничен циклус со произволна форма, фазата може да се дефинира како:

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi \frac{t-t_0}{T}, \quad (2.7)$$

каде што величината T е периодот на периодичното движење. На ваков начин фазата монотонно расте при движење на фазната точка по траекторијата во фазниот простор (слика 2.7) и при секоја полна ротација по траекторијата, фазата се зголемува за 2π .

Во таков случај амплитудата може да се сфати како променлива која го карактеризира трансферзалното отстапување од траекторијата на фазниот циклус. Движењето на фазната точка долж фазната траекторија може да биде и нерамномерно, па дури и да има интервали на бавно движење следени од големи скокови долж граничниот циклус, како што е кај таканаречените релаксациони осцилатори. И покрај тоа што

движењето на фазната точка може да биде нерамномерно, растот на фазата со времето е секогаш рамномерен.



Слика 2.7 – Фаза кај самоодржувачки осцилатор со граничен циклус со произволна форма.

Најважните карактеристики опишани погоре за квазилинеарен осцилатор важат и во поопшт случај, за произволен самоодржувачки осцилаторен систем. Независно од формата на граничниот циклус, тој е стабилен во трансферзална насока, додека во тангенцијална насока фазната точка може да биде стабилна или нестабилна.

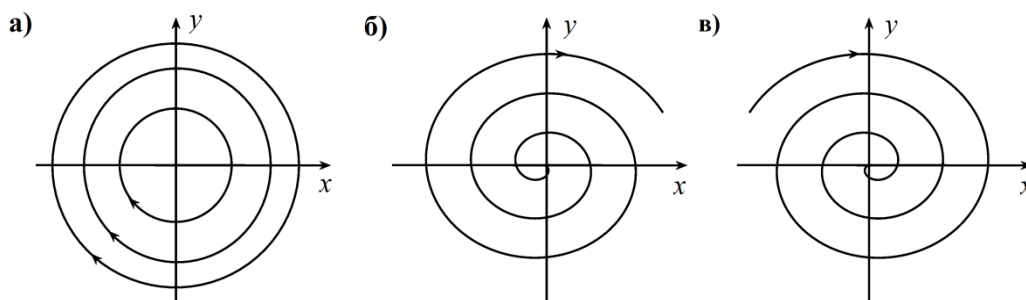
Ако разгледаме две затворени траектории во фазниот простор, основна и пертурбирана, може да се заклучи дека во радијален правец, со текот на времето, пертурбираната конвергира кон основната, додека таква конвергенција не се набљудува во правец долж граничниот циклус. Во нелинеарната динамика, конвергенцијата на блиските траектории се карактеризира со Љапуновиот експонент. Конвергенцијата во фазниот простор одговара на негативен Љапунов експонент, додека дивергенцијата одговара на позитивен експонент. Неговата апсолутна вредност дава информација за брзината на конвергенција. Неутрална насока, која не одговара ни на конвергенција, ни на дивергенција, одговара на Љапунов експонент нула. Теориските истражувања укажуваат дека фазата на осцилаторот може да се смета за променлива која одговара на Љапунов експонент нула [62].

2.3 Главни карактеристики на самоодржувачките осцилатори

Самоодржувачките осцилации се стабилни осцилации во автономни дисипативни системи чија амплитуда не се намалува. Најчесто, поради некаков вид на отпор (механичко триење, електричен отпор или било кој друг вид неповратно претворање на енергијата на системот во топлина) макроскопските системи во природата ја трошат својата енергија. Поради тоа, без постојан внес на енергија во системот, осцилациите ќе се пригушат, односно нивната амплитуда ќе се намалува до исчезнување. Поради тоа, самоодржувачки осцилатор мора да има некаков внатрешен извор на енергија. Кај

часовникот со нишало, осцилациите се одржуваат како резултат на потенцијалната енергија на подигнат тег или на набиена пружина.

Втора карактеристика која ги разликува самоодржувачките осцилатори од останатите е стабилноста на осцилациите во однос на надворешни пертурбации. На слика 2.8 а) е даден приказ во фазниот простор на периодичните движења на конзервативен систем. Ако ваквиот систем не оддава и не прима енергија, при пертурбација на системот, тој ќе премине во новата, пертурбирана состојба и ќе остане во неа. Амплитудата на осцилациите ќе се промени и системот ќе ги продолжи осцилациите со новата амплитуда. Тоа значи дека конзервативните системи не се независни од почетните услови, па периодичните осцилации на системот ќе зависат од начинот на кој системот е придвижен на почетокот.



Слика 2.8 – Фазен портрет на: а) периодично движење кај конзервативен линеарен систем, б) систем со надворешен извор на енергија, в) систем со пригушување.

Трета карактеристика на самоодржувачките осцилатори е нивната нелинеарност. Нелинеарноста е неопходна за одржување на стабилни осцилации на граничен циклус. Стабилноста на осцилациите значи дека периодичното движење на системот е можно само при одредени амплитуди. Таа не може да биде одржана за линеарен систем, бидејќи за линеарен систем, ако решението $x(t)$ е периодично, тогаш и решението $a \cdot x(t)$ е исто така периодично. Затоа, линеарен систем кој осцилира периодично е неминовно конзервативен систем. Линеарниот систем со пригушување, или со надворешен извор на енергија, ќе има растечко или опаѓачко решение во фазниот простор, слика 2.8 б), в), но не и движење на граничен циклус. Почетокот на стабилно осцилаторно движење математички се опишува како привлекување на траекторијата од граничниот циклус. Физички ова може да се интерпретира на следниот начин. Независно од конкретните механизми на трошење на енергијата на системот и на нејзино надокнадување, секогаш мора да постои некој извор кој ќе ја надокнадува потрошената енергија при осцилаторните промени. Колку енергија осцилаторот ќе земе од изворот, зависи од амплитудата на осцилациите. Истовремено и потрошената енергија од системот е функција од амплитудата на осцилациите. Независно од конкретните облици на овие две зависности, стационарните осцилации секогаш ќе се воспостават при онаа амплитуда при која потрошената и додадената енергија ќе се изедначат. Ова е возможно само доколку системот е нелинеарен, т.е. ако е опишан со

нелинеарни диференцијални равенки. При спроведување на фреквентна или временско-фреквентна анализа на ваквите нелинеарни системи, ќе се утврди присуство и на високи хармоници и притоа колку системот повеќе отстапува од линеарноста, толку ваквите високите хармоници ќе бидат позастапени.

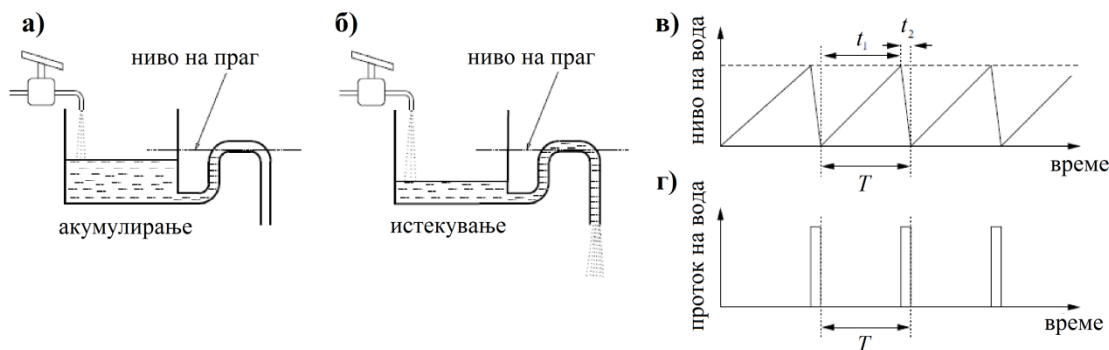
Потребно е да се направи разлика помеѓу самоодржувачките осцилатори и присилените осцилатори бидејќи и во двата случаи осцилаторните процеси во фазниот простор се претставуваат со затворена крива која ги привлекува траекториите од нејзината близина. Но, суштинската разлика се состои во тоа што кај самоодржувачките осцилатори фазата на граничниот циклус е слободна, за разлика од фазата на присилениот осцилатор, која не е. Оваа разликата се манифестира при пертурбација на системот. Доколку се пертурбира самоодржувачки осцилатор, системот ќе се врати на граничниот циклус при некоја вредност на фазата која зависи од вредноста на пертурбацијата. Од друга страна, кај присилените осцилатори, независно од големината на пертурбацијата, осцилаторот секогаш се враќа во почетната непертурбирана состојба при точно определена вредност на фазата, која е одредена од надворешната сила. Ова е една од главните причини зошто некои феномени, како на пример синхронизацијата, се среќаваат кај самоодржувачки осцилатори, но не се среќаваат кај присилени осцилатори.

2.4 Релаксациони осцилатори

Постојат повеќе примери на самоодржувачки осцилатори, меѓу кои се и значајната класа осцилатори наречени релаксациони осцилатори. Еден од најзначајните осцилатори од оваа класа е срцевиот мускул или поопшто кардиоваскуларниот систем како целина, за кој се смета дека и самиот претставува мрежа од шест спрегнати осцилатори [63]. Карактеристика на овој вид осцилатори е постоењето на две временски скали во нивното осцилирање – за време на секој циклус има период на брзо и период на бавно движење. Поради тоа, формата на осцилациите воопшто не наликува на едноставниот синусен бран туку повеќе наликува на секвенца на пулсеви.

За објаснување на функционирањето на релаксационите осцилатори го разгледуваме едноставниот модел на Пановко и Губанова [64] прикажан на слика 2.9. Главен елемент на осцилаторот е еден сад кој бавно се полни со вода, слика 2.9 а). Кога нивото на водата ќе достигне извесен праг, слика 2.9 б), садот бргу се празни, по што започнува следниот циклус. Енергијата на пумпата која овозможува постојано дополнување на вода се претвора во осцилации на нивото на вода во садот. На слика 2.9 в) е прикажана промената на нивото на вода во садот со времето, од која се гледа дека по достигнување на прагот, нивото на вода за кратко време се враќа на нула. Истовремено, враќањето на осцилаторот во првобитната состојба е проследено со пулс во водениот

проток, што е прикажано на слика 2.9 г). На двата графика јасно се гледаат интервалите на бавно и брзо движење.



Слика 2.9 – Релаксационен осцилатор: а) бавно полнење на сад со вода, б) брзо празнење на водата од садот, по достигнување на прагот, в) по постигнување на прагот нивото на вода бргу опаѓа до нула, г) враќањето на осцилаторот во првобитната состојба соодветствува на пулс во графикот на водениот проток.

Главната карактеристика на релаксационите осцилатори, бавниот пораст на некоја величина и веднаш потоа брзиот пад кон почетната состојба, се среќава кај многу биолошки системи. Еден од примерите е кај спонтано активирани неврони: ако се внесува електричен полнеж во клетката, електричниот потенцијал на нејзината мембрана бавно се менува, но во даден момент се случува брза промена која предизвикува врвови со времетраење од околу 2 ms, означени како акционен потенцијал. Вакви врвови се случуваат секогаш кога потенцијалот на невронот ќе достигне околу -50 mV, при што настанува електрично празнење кое го враќа потенцијалот на клетката на околу -70 mV. Генерирањето на врвовите е резултат на капацитивноста на клеточната мембрана и нелинеарната зависност на нејзината спроводливост од напонот. Кога се внесува постојан полнеж во клетката, акционите потенцијали се генерираат со постојана фреквенција. Мали варијации на внесениот полнеж ја менуваат брзината на активирање на невронот, на начин сличен со регулирањето на фреквенцијата на нивото на водата на слика 2.8 преку отворање или затворање на славината. На ваков начин работат сензорните неврони – интензитетот на стимулацијата е вкодирана во брзината на активирањето на невроните.

Друг важен биолошки пример на релаксационен осцилатор е срцевата работа. Познато е дека дури и изолирано срце ја задржува способноста за ритмички контракции *in vitro*. Доколку релаксиран срцев мускул артериорно се наполни со физиолошки оксигениран раствор, синусниот јазол, кој делува како срцев пејсмејкер, ќе продолжи да ги иницира срцевите биенја. При разгледување на нормалното функционирање на срцето, *in vivo*, целокупниот кардиоваскуларен систем се смета за единствен осцилатор. Тој ги вклучува сите мозочни центри вклучени во регулацијата на срцевиот ритам, како и автономниот нервен систем. Ваквиот кардиоваскуларен осцилатор е во меѓусебна

интеракција со други физиолошки осцилатори, пред сè респираторните осцилации, но тие не се причина за срцевото биење, туку посоодветно е да се сфатат како негови пертурбации. Наспроти ваквите пертурбации, срцето произведува сопствен ритам на осцилации, поради што може да се смета за самоодржувачки осцилатор.

2.5 Неавтономни самоодржувачки осцилатори

Неавтономни системи се оние на кои дејствуваат надворешни сили кои влијаат на нивното движење. Од математички аспект неавтономните системи се опишуваат со диференцијални равенки кои во себе содржат експлицитна временска зависност. Надворешните влијанија може да имаат различна природа и да влијаат на системот на различен начин. Така на пример, надворешната сила може да биде периодична, може да биде квазилинеарна функција, или едноставно да внесува шум во системот кој се разгледува. Може да влијае на некој од параметрите на системот, или да влијае на заемнодејствата меѓу различните делови на системот.

Автономните динамички системи се карактеризираат со диференцијални равенки во кои не фигурира експлицитна зависност од времето, т.е. решението на ваквиот систем е од облик зададен со равенката $x(t) = f(x)$. Ваквите системи се интензивно теориски истражувани во минатиот век, што довело до темелно разработена теорија на динамички системи. Една од основните претпоставки на формулацијата на ваквите системи е дека тие директно не зависат од почетното време t_0 , ниту од моментното време t во нивната временска еволуција, туку единствено зависат од изминатото време во еволуцијата, односно од разликата $t - t_0$. За разлика од нив, кај неавтономните системи, чие решение е опишано со равенка од вид $x(t) = f(x, t)$, при разгледување на еволуцијата на системот значајни се и почетното време t_0 и моментното време t , а не само нивната разлика.

Во последната декада се направени значајни чекори во математичките формулации на неавтономните системи од кои се произлезени два доминантни формализми [6, 65]. Првиот од нив, познат како процесен формализам или формализам на двопараметарски полугрупи, претставува природна генерализација на формализмот на полугрупи кај автономните системи. Во него, параметарот $t - t_0$ се заменува со два одделни параметри t и t_0 . Вториот формализам, наречен формализам на искривен проток на производ („skew product flow formalism“), вклучува автономен динамички систем како механизам кој е одговорен за временската промена на векторското поле на неавтономниот динамички систем. Иако процесниот формализам е поинтуитивен, се покажува дека вториот формализам дава повеќе информации за временската еволуција на динамичкиот системи и поради тоа наоѓа поширока примена во различни практични апликации на теоријата на неавтономните динамички системи.

Често пати, при разгледување на неавтономни динамички системи, проблемот се заобиколува преку сведување на неавтономниот систем на автономен, преку вклучување на дополнителна променлива која игра ја улогата на временската зависност во функцијата $f(x, t)$. Ваквиот пристап не е математички оправдан, бидејќи кога $t \rightarrow \infty$, новата променлива не е ограничена во време и атракторите не можат да бидат задоволително дефинирани. И покрај тоа, ваквиот пристап често се користи, особено при толкување на експериментални резултати каде што динамичкото поведење се набљудува ограничен временски период. Ваквиот пристап е често користен кога динамичкото поле е периодична функција од времето, на пример зададено со равенката $x = f(x, \sin(t))$, случај означен како надворешна осцилаторна пертурбација, при кој дополнителна променлива ја игра улогата на временската зависност. Втор пример на користење на овој пристап е кога динамичкото поле е стохастично, односно кога временски зависниот дел е шумот. Овие два примера може да се сметаат за два гранични случаи на надворешна пертурбација која потекнува од систем со еден степен на слобода или од систем со бесконечно степени на слобода, соодветно. Помеѓу овие два гранични случаи се наоѓаат плејада на случаи кога временската зависност не е ниту целосно периодична, ниту целосно стохастична. Вакво пример би бил динамичкиот систем претставен со равенката $x = f(x, g(t))$, каде што функцијата $g(t)$ е n -тата компонента на хаотичен динамички систем со мал број димензии.

Присуството на независна променлива во равенките кои ги опишуваат неавтономните системи често пати доведува до тоа да системот е или аналитички нерешлив, или изнаоѓањето на аналитичко решение е многу сложено. Засега не постои општа математичка техника која доведува до решение на системот, туку секоја одделна неавтономна равенка е од сопствен тип или припаѓа на некоја група решенија. Популарни математички техники кои се користат за решавање на неавтономни системи вклучуваат пертурбациони методи, нехомогени диференцијални равенки, теоријата на Флоке итн.

Од интерес за оваа теза е проучувањето на неавтономни самоодржувачки осцилаторни системи, кои претставуваат дел од широката класа неавтономни системи. Во својот труд, Анишенко [66] ги има наброено најчестите случаи на неавтономност кај осцилаторните динамички системи, вклучувајќи ги и оние каде што граничните циклуси се резултат на надворешни, неавтономни полиња. Се ограничуваме на разгледување на самоодржувачките осцилатори чија еволуција, во отсуство на неавтономно влијание, може да се прикаже со граничен циклус. На тој начин дури и кога главните карактеристики на осцилаторниот систем, како неговата фреквенција, облик на граничниот циклус итн, се променливи, системот во целото време може да се смета дека е самоодржувачки.

За разлика од автономните осцилатори, опишани со равенката 2.6, кај кои во отсуство на надворешно влијание решението $x(t) = x(t + T)$ е периодично со период T , кај неавтономните осцилатори, полето $f(x(t), t)$ е експлицитна функција од времето t . Во

таков случај, решението $x(t)$ ја губи строгата периодичност, а големината на периодот T веќе не е строго постојана. Во отсуство на периодично решение се воведува концептот на моментен период T и моментна фреквенција f и во секој момент од времето τ , моментниот период $T(\tau)$ е периодот на решението на граничниот циклус при зависност $f(x(t), \tau)$ со τ фиксно.

Следејќи ја дефиницијата на фазната функција дадена од Курамото [3], може да се дискутира генерализација за неавтономните осцилатори [7]. Кај автономни системи, фазата на граничниот циклус е дефинирана како функција која што при секој циклус се зголемува за 2π . Неавтономна верзија на фазната функција може да се дефинира како:

$$\frac{d\phi(x,t)}{dt} = \omega(t) + \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}, \quad (2.8)$$

каде што величината $\omega(t) = 2\pi/T(t)$ е моментната аголна фреквенција т.е. карактеристичната фреквенција на граничниот циклус на динамиката дефинирана во моментот τ :

$$\omega(\tau) = \frac{1}{T(\tau)} \int_0^{T(\tau)} \nabla_x \phi(x, \tau) f(x(t), \tau) dt. \quad (2.9)$$

Ова претставува природно воопштување на поимот за фазата на автономен осцилатор, при што:

$$d\phi(x)/dt = 2\pi/T = \nabla_x \phi f(x). \quad (2.10)$$

Вториот член во равенката 2.8 може да биде присутен на пример поради влијанието на пертурбираните амплитуди врз фазната динамика.

3. ФУНКЦИИ НА СПРЕГА

Заемнодејствата во кои стапуваат динамичките системи во природата се дефинирани од два клучни аспекта, нивната структура и нивната функција [43, 67]. Структурниот аспект ги одредува врските помеѓу системите и нивната меѓусебна комуникација, додека функционалниот ги одредува законитостите на заемнодејствата кои го одредуваат заедничкиот развој на системите. Функционалните механизми може да доведат до низа квалитативни промени во системите, како резултат на кои може да дојде до појавување на различни состојби, феномени и физички ефекти, како што се синхронизација, амплитудна и осцилаторна смрт, раѓање на осцилации, фрактални димензии и друго. Еден од начините на опишување на функционалните механизми е со користење на функции на спрега. Функциите на спрега ги опишуваат физичките законitosti со кои се опишува заемнодејството на системите. Познавањето на функциите на спрега може да се искористи за регистрирање или предвидување на некој физички ефект, а со тоа и како прв чекор во моделирањето на дејството на тој ефект, што особено е од интерес на медицинските науки во врска со различните физиолошки состојби на здрав и болен организам.

Историски гледано, функциите на спрега се воведени при испитување на појави кои се последица на колективна динамика, како што се синхронизацијата или осцилаторната смрт и раѓање [3, 4]. Природата на заемнодејствата меѓу елементите на колективот, опишано преку функциите на спрега, може да доведе до специфична колективна динамика и однесување на системот, дури и кога поединечните елементи се релативно едноставни. Така на пример, синхронизацијата на колективи настанува преку заемнодејства помеѓу индивидуалните осцилатори од системот со слаб интензитет, кои можат да се опишат со функции на спрега со одредена форма и јачина. Проучувањето на ваквите системи составени од голем број индивидуални елементи доведува и до значајни практични апликации, кои зависат единствено од функциите на спрега. Еден таков пример е примената на функциите на спрега за воспоставување сигурна комуникација [40]. Сепак, современите апликации на функциите на спрега не се ограничени само на колективна динамика и опфаќаат многу различни научни области. Потекнувајќи од физиката и математиката, актуелните апликации вклучуваат нивна примена во хемијата, неврологијата, физиологијата, микробиологијата, механиката, климатските науки, електроинженерството, па дури и во општествените науки.

Заемнодејството во основа е резултат на структурна врска преку која што се пренесува каузална информација од еден систем на друг. Често пати колективното однесување на системот не е одредено толку од природата на одделните делови на системот, колку што е одредено од тоа како деловите од системот заемнодејствуваат. Самиот систем може да има различна природа, да биде статичен или динамичен, да има

осцилаторни, неавтономни, хаотични или стохастички карактеристики. Меѓусебната интеракција на деловите од системот може да ја смени неговата квалитативна состојба, предизвикувајќи премини на системот во и од состојби како синхронизација, амплитудна или осцилаторна смрт или квазисинхронизирани состојби кај мрежи од осцилатори.

Постоењето на физички ефект е одредено од постоење на стабилна состојба на спрегнатиот систем. Стабилноста на состојбата често се проверува преку динамика со редуцирана димензионалност, на пример, динамика на фазната разлика или динамика само на системот кој е под влијание. Преку проучување на стабилноста на редуцираната динамика може да се изведуваат заклучоци за колективното однесување на системот. Во такви случаи функциите на спрега опишуваат како се постигнува стабилната состојба и кои се потребните услови за спрегнатиот систем да ја постигне или изгуби стабилноста. При разгледување на проблем на анализа на податоци, постоењето на некој физички ефект се проценува преку мерки кои директно или индиректно ги квантификуваат статистичките карактеристики на разгледуваната состојба.

Физичките ефекти често конвергираат кон тополошко множество како што е граничниот циклус. Дури и по конвергенцијата, спрегнатите динамички системи можат да задржат сопствена динамика. Еден од најпроучуваните физички ефекти е синхронизацијата. Таа се дефинира како прилагодување на ритмите на осцилаторите поради нивното слабо заемнодејство. Голем број кооперативни интеракции во природата доведуваат до квалитативната состојба на синхронизација. Меѓу големиот број примери се и кардиореспираторната синхронизација, епилептичните мозочни напади, нервномускулната синхронизација, еколошката синхронизација и друго. Зависно од доменот, величините кои се евалуираат и појавите на кои се заснова, проучувани се повеќе различни типови синхронизација, како на пример фазна синхронизација, фреквентна синхронизација, потполна синхронизација, генерализирана синхронизација итн.

Друга значајна група физички ефекти кои се последица на заемнодејствата, се ефектите поврзани со амплитудна и осцилаторна смрт. Осцилаторната смрт е дефинирана како потполн прекин на осцилациите, кој е резултат од заемнодејствата, при што се постигнува нехомогена стабилна состојба. Слично, кај амплитудната смрт се постигнува хомогена стабилна состојба при која осцилациите исчезнуваат. Механизмите кои доведуваат до овие два ефекта се опишани преку различни функции на спрега и услови на заемнодејство, меѓу кои силна спрега, коњугирана спрега, нелинеарна спрега и друго. Овие ефекти се резултат не само на фазната динамика на осцилаторите кои заемнодејствуваат, туку и на нивната амплитудна динамика, каде што и членовите кои ја одредуваат амплитудата играат значителна улога. Функциите на спрега го дефинираат механизмот преку кој заемнодејствата доведуваат до исчезнување на осцилациите.

Постои обемна литература во која се проучуваат физичките ефекти, квалитативните состојби или квантитативните карактеристики на заемнодејствата, каде

што функциите на спрега се интегрален дел на утврдениот модел на заемнодејство. Во дел од овие истражувања функциите на спрега често не се споменати, ниту евалуирани, бидејќи целта на истражувањето е дали физичкиот ефект настанува, додека прашањето кое го анализираат функциите на спрега е начинот на кој ефектот настанува.

3.1 Основни концепти за функциите на спрега

Проблемот кој се разгледува е да се осознае динамиката на спрегнат систем од составните делови. Во општ случај системот може да се опише со диференцијалните равенки:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x) + g_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(y) + g_2(x, y),\end{aligned}\tag{3.1}$$

каде што функциите f_1 и f_2 се векторски полиња кои ја опишуваат изолираната динамика за секоја од променливите, додека функциите g_1 и g_2 се функциите на спрега кои го опишуваат влијанието од едниот осцилатор на другиот. Притоа се претпоставува дека функциите на спрега се најмалку два пати диференцијабилни.

Често пати во литературата се среќава и поинаква репрезентација на равенката 3.1, дадена со следната равенката:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= q_1(x, y), \\ \dot{y} &= q_2(x, y),\end{aligned}\tag{3.2}$$

каде што функциите q_1 и q_2 во себе ја вклучуваат и сопствената динамика и функциите на спрега. Ваквиот начин на запишување на системот е користен при проучување на мрежи од спрегнати ќелии или при развој во целосен Фуриеов ред, при инференција на функциите на спрега од мерени податоци.

Главен фокус на истражувањето на функциите на спрега е опишувањето како настануваат заемнодејствата и како тие се развиваат. Функциите на спрега го претставуваат физичкиот закон кој опишува како се одвиваат интеракциите. Бидејќи се претставени со функционални зависности, функциите на спрега не се фокусираат на тоа дали постојат заемнодејства меѓу системите, туку како тие заемнодејства се појавуваат и се развиваат. Така на пример, при разгледување на два спрегнати осцилатори, големината на фазната функција на спрега директно влијае на осцилаторната фреквенција и опишува како се забрзува или забавува едниот од осцилаторите под влијание на другиот. Слично, ако се разгледува амплитудната динамика на динамичките системи кои заемнодејствуваат, големината на функцијата на спрега ќе опишува како амплитудата се зголемува или намалува при заемнодејството.

Функцијата на спрега може да биде опишана преку нејзината јачина и преку нејзината форма. Јачината на спрегата ја опишува големината и опсегот на спрегата, додека формата на функцијата на спрега дава дополнителна димензија одредена директно од механизмот на заемнодејство. Механизмот на заемнодејство е опишан со формата на функцијата која ги дава законитоста и начинот како од влезните величини се доаѓа до излезните величини, т.е. како влезното влијание од едниот систем се трансформира во излезен ефект врз вториот систем од спрегата. На таков начин, функцијата на спрега ги опишува квалитативните премини помеѓу различните состојби на системот, на пример премин во и од синхронизирана состојба. Знаејќи ја формата на функцијата на спрега и влезните величини, може да се предвиди, контролира или влијае на преминот од една состојба во друга. Преку декомпозиција на функцијата на спрега, може да се утврдат и опишат функционалните придонеси на секој од подсистемите во рамките на спрегнатиот систем. Поради тоа познавањето на функцијата на спрега во суштина означува осознавање на механизмите кои лежат во основа на интеракциите помеѓу деловите од системот.

3.1.1 Јачина и насоченост на спрегата

Јачината на спрега претставува квалитативна мерка на протокот на информации помеѓу спрегнатите системи. Во информациско теориски контекст, таа е дефинирана како пренос на информации помеѓу променливите во даден процес. При теориските разгледувања, јачината на спрегата е параметарот на скалирање на функциите на спрега. Поради големиот интерес за евалуирање на јачината на спрегата, развиени се повеќе методи со таа цел [34, 45, 68-72]. Доминантната насока на влијание, односно насоката на посилната спрега, соодветствува на насоченоста на заемнодејството. Постојат неколку методи [34, 69] кои од мерењата на релативните големини на заемнодејствата, преку детектирање на заедничка информација, ја евалуираат насоката на спрегата, но не и физичката јачина на спрегата. Евалуацијата на јачината на спрегата и нејзината доминантна насока се користат за утврдување дали воопшто постои заемнодејство и дали навистина системите кои се проучуваат се поврзани или не.

Кога функцијата на спрега е составена од повеќе компоненти, нејзината нето јачина вообичаено се проценува како Евклидова норма од јачините на спрега на одделните компоненти. Преку групирање на одделни компоненти, на пример на Фуриеовите компонентни кај периодичните фазни динамики, може да се евалуира јачината на спрега на одредена функционална група од интерес. Таа може да ги вклучува јачините на спрега од едниот систем, од вториот или од двата. На таков начин може да се процени јачината на сопствената компонента на спрегата, јачината на компонентата која потекнува од другиот осцилатор или јачината на заедничката компонента, како и кривата на фазен одговор. Ваквите концепти може да се генерализираат и за мултиваријантни спреги во мрежи на системи кои заемнодејствуваат.

Треба да се напомниме дека дури и кога се инферираат спреги од целосно неспрегнати или слабо спрегнати системи, методите вообичаено даваат јачини на спреги различни од нула. Ова е последица на статистичките карактеристики на користените сигнали. Затоа, потребно е да се процени дали детектираните јачини на спрега се вистински или се само резултат на методот на инферирање. Еден начин за надминување на ваквата потешкотија е преку спроведување на тестирање на сурогати, кое генерира независни, неспрегнати сигнали кои имаат исти статистички карактеристики како и оригиналните сигнали. Добиената јачина на спрега од ваквите сурогат сигнали треба да се смета за нулто ниво со кое треба да се нормализира добиениот сигнал. Ваквото сурогат тестирање е потребно и за детектирање на функциите на спрега, за да се утврди дали спрегата е вистинска или не.

3.1.2 Пример за функција на спрега

За да ги илустрираме концептите за функциите на спрега, го разгледуваме моделот на Курамото [3] за синхронизација на два спрегнати фазни осцилатори:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \varepsilon_1 \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \varepsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2),\end{aligned}\tag{3.3}$$

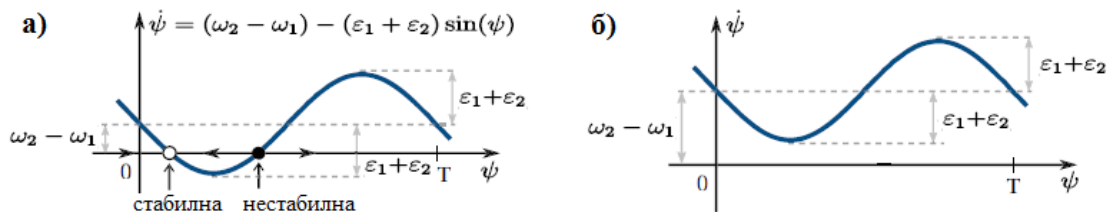
каде што величините ϕ_1 и ϕ_2 се фазните променливи на осцилаторите, величините ω_1 и ω_2 се нивните сопствени фреквенции, величините ε_1 и ε_2 се параметрите на јачината на спрега, а функциите на спрега се двете синусни функции. Притоа спрегата се смета дека зависи само од фазната разлика помеѓу осцилаторите $\psi = \phi_2 - \phi_1$. Бидејќи во ваков случај изводот $\dot{\psi} = \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1$, може да запишеме дека

$$\dot{\psi} = \Delta\omega + \varepsilon q(\psi) = (\omega_2 - \omega_1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \psi.\tag{3.4}$$

Синхронизација ќе настане ако фазната разлика ψ е ограничена, односно ако равенката 3.4 има најмалку еден пар решенија, од кои едното е нестабилно, а второто стабилно. Дали ќе постои решение ќе зависи од формата на функцијата на спрега и од конкретните вредности на параметрите. Во случајот на моделот на Курамото, каде што функцијата на спрега има синусна форма $q(\psi) = \sin \psi$, може да се утврди дека услов за појава на синхронизација е $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \geq |\omega_2 - \omega_1|$.

На слика 3.1 е шематски прикажана врската помеѓу функцијата на спрега и синхронизацијата. На слика 3.1 а) е прикажан осцилаторниот граничен циклус за два синхронизирани осцилатори. Резултантната јачина на спрега $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ има поголема вредност од разликата во фреквенциите $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ и за одредени точки долж осцилаторниот циклус е исполнет условот изводот $\dot{\psi} = 0$. Тоа значи дека постојат точки на стабилна и нестабилна рамнотежа и осцилаторите може да се синхронизираат. На слика 3.1 б) е прикажана иста форма на функцијата, но во овој случај осцилаторите не се

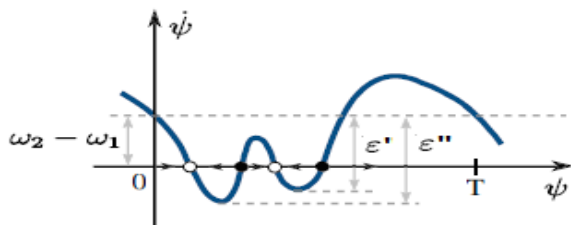
синхронизирани бидејќи разликата во нивните фреквенции е поголема од резултантната јачина на спрега. Споредбата на 3.1 а) и 3.1 б) покажува дека иако формата на кривата е иста, со промена на фреквенциите и јачините на спрегите, кривата може да се поместува и само за одредени вредности на параметрите ќе може да се постигне синхронизација.



Слика 3.1 – Состојба на синхронизација претставена преку динамиката на фазната разлика.

Во зависност од постоењето на стабилна рамнотежа, осцилаторите може да се: а) синхронизирани или б) не синхронизирани. Точките на стабилна рамнотежа се прикажани со празни кругови, додека точките на нестабилна рамнотежа се прикажани со полни кругови.

Најчесто, кај реалните системи функциите на спрега се значително посложени од обичен синусен облик, што е прикажано на слика 3.2, каде што исто така е прикажан случај на синхронизација на два спрегнати осцилатори.



Слика 3.2 – Синхронизација кај реален систем. Празните кругови претставуваат стабилна, а полните, нестабилна рамнотежа.

Формата на функцијата на спрега, прикажана на оваа слика, има два пара стабилно-нестабилни рамнотежни точки, поради што може да има две критични јачини на спреги ε' и ε'' и секоја од нив може да биде поголема од разликата во фреквенциите $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, што ќе доведе до стабилни рамнотежи и задоволување на условите за синхронизација. Ваквата комплексна ситуација може да предизвика бистабилност, каква што се среќава во некои хемиски експерименти. На тој начин, споредбата на сликите 3.1 а) и 3.2 покажува дека при испитувањето на состојбата на синхронизација може да постојат различни механизми, дефинирани со функции на спрега со различни форми.

3.1.3 Фазна редукција при слаби заемнодејства

За проучувањето на функциите на спрега помеѓу осцилатори кои заемнодејствуваат често пати се користи нивната фазна динамика [1, 3, 4, 73]. Аналитичките техники и методи кои се користат за анализа на динамиката на системот зависат од тоа дали спрегата е силна или слаба, односно дали јачината на спрегата е голема или мала. Доколку е спрегата силна, неопходно е целосно разгледување на системите диференцијални равенки со кои се опишуваат осцилаторите. Од друга страна, ако е спрегата слаба и системот има стабилен граничен циклус, може да се применат процедури за редукција до фаза кои систематски ја апроксимираат повеќе димензионалната динамичка равенка на пертурбиран осцилатор на граничен циклус со едnodимензионална равенка со редуцирана фаза, во која состојбата на осцилаторот е прикажана со помош на едnodимензионална фазна променлива ϕ [74].

По дефиниција, осцилаторен режим со слаба спрега значи дека јачината на спрегата е недоволна значајно да влијае на амплитудите. Но, спрегата сепак може да доведе до прилагодување на фазите и ускладување на динамиките на осцилаторите. Голем број појави во природата се резултат на слаби заемнодејства помеѓу осцилаторите и како такви може да се опишат со помош на слаби спреги.

Доколку системот кој се разгледува има експоненцијално стабилна периодична орбита, теориските разгледувања утврдуваат постоење на можност за редукција и обезбедуваат метод како тоа да се спроведе. Се разгледува систем

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.5)$$

каде што функцијата $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ има рамномерно експоненцијално привлечна периодична орбита γ со период T : $\gamma(t + T) = \gamma(t)$. Орбитата се смета за експоненцијално стабилна, доколку за точки доволно блиски до орбитата, траекториите на системот ѝ се приближуваат експоненцијално брзо и притоа стапката на конвергенцијата не зависи од почетното време или од почетните услови.

Може да се спроведе параметризација на орбитата преку нејзината фаза ϕ : $\gamma(\phi + 2\pi) = \gamma(\phi)$. Исто така, може да се репараметризира времето, така што фазата ϕ рамномерно расте долж орбитата γ . Тогаш важи:

$$\dot{\phi} = 1 = \nabla_{\gamma} \phi \cdot f(\gamma). \quad (3.6)$$

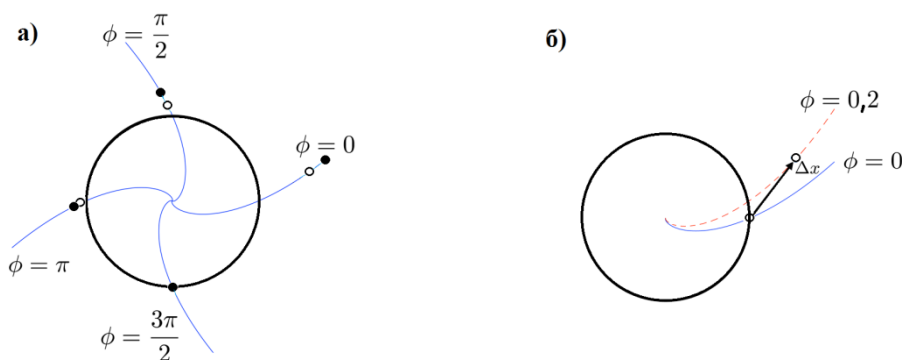
Главната идеја е дека слабата спрега може да изврши прилагодување на ритмот на фазната динамика. Целта е да се добие фазна редукција врз основа единствено на информацијата за изолираниот систем, односно врз основа на информацијата за орбитата γ . Поради тоа се врши проширување на значењето на фазата ϕ на околина на орбитата. Бидејќи периодичната орбита е експоненцијално и рамномерно привлечна, таа ќе

привлекува на отворена околина на орбитата γ . Оваа отворена околина е наречена базен на привлечност на периодичната орбита. За секоја почетна точка x_0 во овој базен на привлечност, орбитата ќе конвергира кон орбитата γ . На тој начин се доаѓа до фазата $\phi(x_0)$, каде што

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - \gamma(t + \phi(x_0))| = 0, \quad (3.7)$$

при што зависноста $x(t, x_0)$ е решението на системот со почетни услови x_0 . За секоја точка во базенот на привлечност на орбитата γ , на неа може да доделиме еднозначна точка θ . Вака дефинираната $\phi \in [0, 2\pi]$ се нарекува асимптотска фаза.

За секоја вредност на фазата ϕ на орбитата γ , постои крива која минува низ оваа фазна вредност. Долж таа крива, секои почетни услови x_0 ќе доведат до иста вредност на асимптотската фаза ϕ . Ваквата крива се нарекува изохрона и претставува множество точки $\phi(x)$. На слика 3.3 периодичните орбити се прикажани со црни кружници со полна дебела линија, додека изохроните со тенки линии.



Слика 3.3 – а) Приказ на изохроните (тенките сини линии) за една периодична орбита (кружницата). б) Влијание на мала пертурбација Δx која го поместува системот од една на друга изохрона зголемувајќи му ја фазата.

Секоја точка на изохроната има иста вредност за асимптотската фаза и растојанието помеѓу две точки на изохроната експоненцијално се намалува кон нула, што е прикажано со полните и празните мали кругови на слика 3.3 а). На слика 3.3 б) е прикажан ефектот на мала пертурбација врз фазната динамика. Во почетокот точката има фаза $\phi = 0$, а потоа пертурбацијата Δx го поместува системот од почетната состојба на друга изохрона, зголемувајќи му ја фазата. Множеството точки каде што не може да се дефинира изохроната се нарекуваат бесфазни. Откако ќе се најде изохроната, може да се пристапи кон фазната редукција.

Да разгледаме пертурбација на системот кој има стабилна периодична орбита γ и е опишан со равенката 3.5. Притоа,

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon I(\vartheta, x), \quad (3.8)$$

каде што величината $\vartheta = \omega t$ е фазата на надворешното влијание, а величината I е влијанието кое е периодично по фазата ϑ . Слаба спрега значи дека пертурбацијата $\varepsilon \ll 1$.

Теоријата за инваријантни тополошки множества укажува дека кога системот е пертурбиран и јачината на спрегата е мала, постои нова привлечна орбита $\tilde{\gamma}$ блиска до првобитната орбита γ , при што разликата помеѓу орбитите е од ред на големина на величината ε . Притоа, и орбитата $\tilde{\gamma}$ е експоненцијално привлечна и изохроните остануваат непроменети. На таков начин, амплитудите остануваат непроменети, додека динамиката на фазите се менува.

Со помош на асимптотската фаза, се дефинира фаза во околината на орбитата γ . При мала вредност на величината $\varepsilon > 0$ оваа околина ја содржи и новата орбита $\tilde{\gamma}$. Па пресметката на фазата долж орбитата $\tilde{\gamma}$ ќе даде:

$$\dot{\phi} = \nabla_{\tilde{\gamma}} \phi \cdot [f(\tilde{\gamma}) + \varepsilon I(\vartheta, \tilde{\gamma})]. \quad (3.9)$$

Но, во околина на орбитата γ важи $\nabla \phi \cdot f = 1$. Бидејќи орбитата $\tilde{\gamma}$ е за вредност $O(\varepsilon)$ оддалечена од орбитата γ , функциите f и I може да се развијат и да се евалуираат долж орбитата γ , при пертурбација со големина ε . Вообичаено се воведува функција на фазна сензитивност $Z = \nabla_{\gamma} \phi$, по што се добива:

$$\dot{\phi} = 1 + \varepsilon Z(\phi) \cdot I(\vartheta, \gamma(\phi)) + O(\varepsilon^2), \quad (3.10)$$

со што проблемот се сведува на фазата на непертурбираната орбита γ . Оваа метода се означува како фазна редукција и со неа вообичаено се разгледуваат проблеми од обликот:

$$\dot{\phi} = 1 + \varepsilon q(\phi, \vartheta). \quad (3.11)$$

Во пракса, за добивање на функцијата на спрега се следи како се однесува фазата во близина на орбитата γ . Притоа се прават следните чекори:

1. Одредување на фазната сензитивност Z на непертурбираниот систем: откако е добиена асимптотската фаза, може да се користи како нова променлива ϕ , проширувајќи ја дефиницијата на фазата и на околината на орбитата. Знаејќи ја фазата, може да се пресмета функцијата на фазна сензитивност $Z = \nabla \phi$, каде што градиентот се одредува долж орбитата γ .
2. Одредување на функцијата на спрега преку равенката $q = Z \cdot I$. За овој чекор потребно е да се одреди производот на функцијата на фазна сензитивност Z со пертурбацијата p . Вообичаено, при проучување на појави кај колективи, функцијата на спрега ќе содржи брзи и бавни променливи, од кои вообичаено од интерес се бавните, па функцијата на спрега q се усреднува по брзите промени.

Во основа на овој пристап лежи претпоставка дека фазата се менува линеарно со пертурбацијата. Тоа значи и дека функцијата на спрега е линеарна при пертурбацијата. Доколку фазата е пертурбирана за вредност I_1 , па потоа за вредност I_2 , вкупниот ефект ќе биде збир од вредностите I_1 и I_2 . Оваа линеарност е само во однос на пертурбацијата. Самата равенка е нелинеарна во однос на фазната променлива. Линеарноста во однос на пертурбацијата следи од занемарувањето на сите нелинеарни членови и членови од ред на големина на ε^2 при пресметката на фазната сензитивност Z долж непертурбираната орбита. Ваквата линеарност овозможува разгледувања на мрежи и на големи ансамбли осцилатори.

Наведените два чекора ја овозможуваат фазната редукција на проблемот за слабо спрегнати осцилатори какви што разгледуваме во оваа теза.

3.1.4 Фазни функции на спрега

Како што покажавме во претходната глава, доколку заемнодејството меѓу осцилаторите е слабо, динамиката на системот може да се апроксимира со неговата фазна динамика. Иако во таков случај се занемарува амплитудната динамика, сè уште, на поедноставен начин, може да се добијат значајни сознанија за системите и нивните заемнодејства.

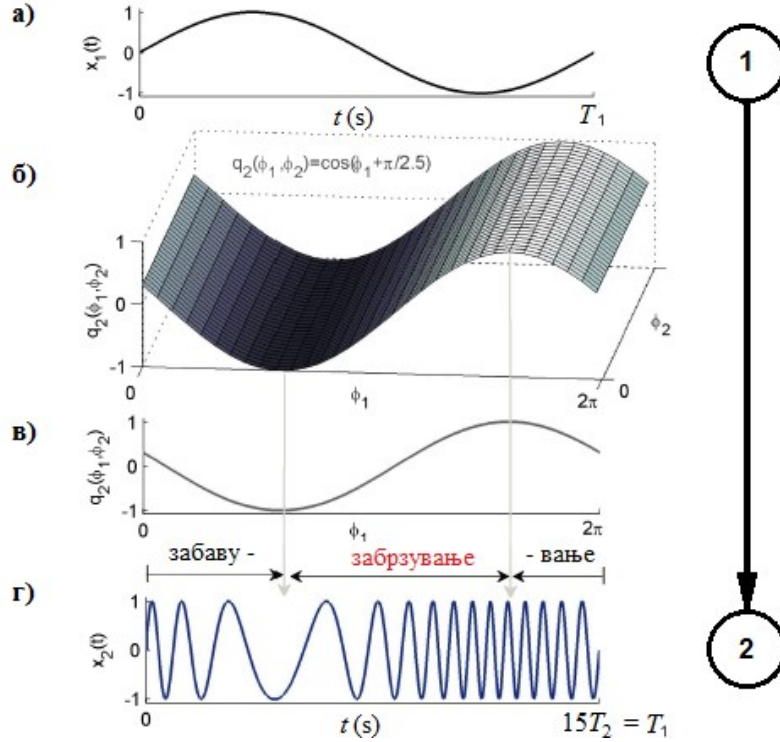
Да разгледаме наједноставен пример на два фазни осцилатори кои се фазно спрегнати во една насока:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + q_2(\phi_1, \phi_2) = \omega_2 + \cos(\phi_1 + \pi/2, 5).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Целта на ова разгледување е да го опишеме влијанието на функцијата на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2)$ со која првиот осцилатор влијае на вториот. Во равенката 3.12, функцијата на спрега е додадена на фреквенцијата на вториот осцилатор. На тој начин промените во големината на функцијата на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2)$ ќе придонесат за промена на фреквенцијата на вториот осцилатор. Зависно од вредноста на функцијата на спрега, осцилациите на вториот осцилатор ќе забрзаат или ќе забават, во споредба со состојбата без пертурбација. Ова е шематски илустрирано на сликата 3.4 (преземена од [43]).

Во реални услови вообичаено се мерат амплитудните состојби на сигналите, па затоа на сликата 3.4 е прикажано како фазните функции на спрега влијаат на амплитудните сигнали. Временските оски на сликата се скалирани релативно во однос на периодот на осцилации T_1 на амплитудниот сигнал од првиот осцилатор $x_1(t)$. Вториот осцилатор е избран да осцилира 15 пати побавно од првиот, односно односот на фреквенциите $\omega_2/\omega_1 = 15$. Конкретната функција на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2) = \cos(\phi_1 + \pi/2, 5)$, прикажана на сликата 3.4 б) на $2\pi \times 2\pi$ решетка, наликува на изместен косинусен

бран кој се менува само долж оската ϕ_1 . Бидејќи сите промени настануваат долж оската ϕ_1 , на слика 3.4 в) е прикажана ϕ_2 -усреднетата проекција на функцијата на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2)$.



Слика 3.4 – Илустрација на фазна функција на спрега кога првиот осцилатор (1) влијае на вториот (2). а) Амплитудниот сигнал на првиот осцилатор за еден период. б) Функцијата на спрега во просторот $\{\phi_1, \phi_2\}$. в) Усреднета проекција на функцијата на спрега по ϕ_2 . г) Амплитудниот сигнал на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.

На слика 3.4 г) е прикажано какво е влијанието на првиот врз вториот осцилатор $x_2(t)$ во текот на времето, а во однос на фазата на функцијата на спрегата. Кога функцијата на спрегата $q_2(\phi_1, \phi_2)$ расте, вториот осцилатор забрзува. Кога функцијата на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2)$ опаѓа, вториот осцилатор забавува. На тој начин формата на функцијата на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2)$ детално го опишува механизмот преку кој првиот осцилатор влијае на вториот, кое влијание во овој пример се сведува на забрзување и забавување на осцилациите на вториот осцилатор.

Во реалните опити, функциите на спрега се вообичаено покомплексни и ваквото еднонасочно директно влијание е најчесто само една компонента на спрегата. На слика 3.5 се прикажани функциите на спрега од моделите на Курамото [3] и Винфри [1, 73].



Слика 3.5 – Две карактеристични функции на спрега во фазен домен. а) Функција на спрега користена во моделот на Курамото [3]. б) Функција на спрега користена во моделот на Винфри [1, 74].

Синусната функција од фазната разлика во моделот на Курамото покажува дијагонална форма, која е прикажана на слика 3.5 а), додека функцијата на влијание-сензитивност во моделот на Винфри, прикажана на слика 3.5 б), покажува покомплесна форма чие распростирање долж двете оски на фазите е различно.

3.1.5 Амплитудни функции на спрега

Проучувањето на динамичките системи преку амплитудната динамика изгледа поприродно на прв поглед, бидејќи при реалните експерименти амплитудната динамика може директно да се набљудува, за разлика од фазната динамика која треба да се изведе од мерењата со извесни трансформации. Проблемот при проучувањето на амплитудната динамика е димензионалноста на системите, односно фактот дека проучувањето на повеќе димензионален систем преку ниско димензионалниот простор на мерењата не секогаш ќе овозможи откривање на скриените карактеристики на повеќе димензионалниот систем. За реконструкција на повеќедимензионални динамички системи од мерењата се користи теоремата на одложено вметнување на Такенс [75], но во практичните апликации со неавтономни и нестационарни динамики теоремата често не ги дава посакуваните резултати [76]. И покрај тоа, проучувањата на земнодејствата во амплитудниот домен е широко распространето, особено при проучување на хаотични системи, силни спреги, системи со големи нелинеарности и друго.

Амплитудните функции на спрега влијаат на динамиките кои заемнодејствуваат преку зголемување или намалување на просторните променливи. Формата на амплитудната функција на спрега може да биде полиномна функција или дифузивна разлика меѓу состојбите. За презентирање на амплитудните функции на спрега разгледуваме пример на заемнодејство на два Поанкаре осцилатори на граничен циклус. Во автономен случај, секој од нив е претставен со поларни координати, радијалната r и аголната ϕ :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r), \\ \dot{\phi} &= \omega.\end{aligned}\tag{3.13}$$

На таков начин, осцилаторот на Поанкаре е претставен со кружен граничен циклус и монотонно растечка изохрона фаза дефинирана од параметарот на фреквенцијата. Во примерот разгледуван од Станковски [43], се врши трансформација на поларните координати во Декартови: $x = r \cos \phi$ и $y = r \sin \phi$ и се користи еднонасочна спрега така што првиот, автономен, осцилатор:

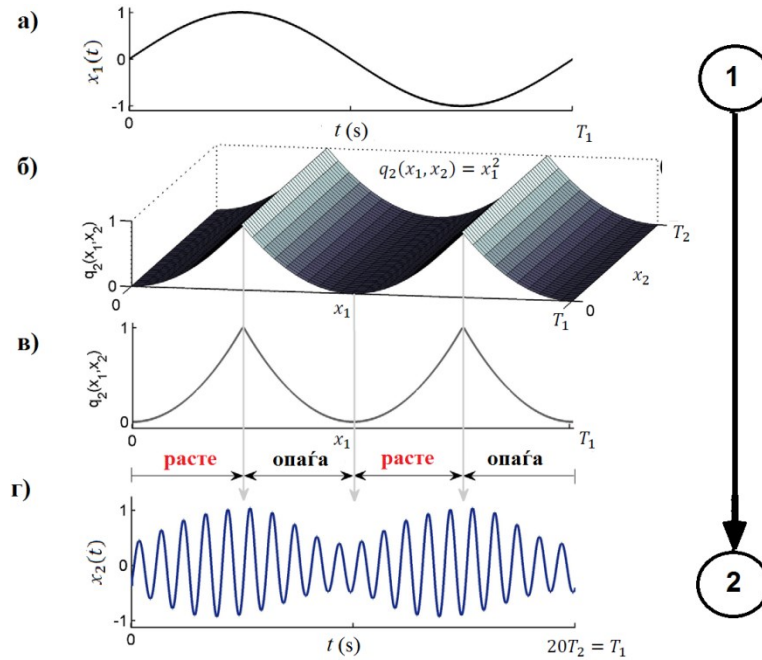
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left(1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)x_1 - \omega_1 y_1, \\ \dot{y}_1 &= \left(1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)y_1 + \omega_1 x_1,\end{aligned}\tag{3.14}$$

влијае на состојбата x_2 на вториот осцилатор преку квадратна функција на спрега $q_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \left(1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)x_2 - \omega_2 y_2 + \varepsilon x_1^2, \\ \dot{y}_2 &= \left(1 - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)y_2 + \omega_2 x_2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

За поедноставна визуелна репрезентација е земено првиот осцилатор да е 20 пати побрз од вториот, т.е. односот на фреквенциите $\omega_2/\omega_1 = 20$, додека за јачината на спрегата е земена висока вредност $\varepsilon = 5$.

Амплитудната функција на спрега е прикажана на сликата 3.6. Теориски, функцијата на спрега $q_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$ зависи од 4 променливи, но, бидејќи зависноста е само од променливата x_1 , поради подобра прегледност, таа е прикажана само како функција од две променливи $q_2(x_1, x_2)$. Формата на функцијата на спрега е квадратна и се менува само долж оската x_1 , што е прикажано на сликите 3.6 б) и в). На сликата 3.6 г) е прикажано како првиот осцилатор влијае на вториот со текот на времето преку функцијата на спрега. Кога квадратната функција на спрега $q_2(x_1, x_2)$ расте, тогаш и амплитудата на вториот осцилатор расте. Слично, кога функцијата на спрега $q_2(x_1, x_2)$ опаѓа, и амплитудата на вториот осцилатор опаѓа.



Слика 3.6 – Илустрација на функција на спрега за амплитудна динамика кога првиот осцилатор (1) влијае на вториот (2). а) Амплитудниот сигнал на првиот осцилатор за еден период. б) Функцијата на спрега во просторот $\{x_1, x_2\}$. в) Усреднета проекција на функцијата на спрега по x_2 . г) Амплитудниот сигнал на вториот осцилатор за време од еден период на првиот осцилатор.

Постојат повеќе методи кои инферираат модели кои во себе вклучуваат амплитудна функција на спрега [52, 77-78] или имаат претпоставено веројатни модели, но без експлицитно вклучување на функција на спрега. Поради повеќедимензионалноста и отсуството на општи карактеристики на динамичниот систем, како што е на пример периодичноста кај фазната динамика, постојат неограничени можности за генерализирање на функциите на спрега. Во таа смисла, непостоењето на општи модели е недостаток кој оневозможува поширока примена на амплитудните функции на спрега. Поради тоа постои голем простор за истражувања во насока на воопштување на ваквите модели и од аспект на методи и од теориски аспект.

3.1.6 Мултиваријантни функции на спрега

Во претходните глави беа разгледани функции на спрега кои ги опишуваат заемнодејствата помеѓу два системи. Кога заемнодејствата се случуваат помеѓу повеќе од два системи во некој мрежа, тие може да се опишат со мултиваријантни функции на спрега со повеќе од две влезни променливи. Така, на пример, мултиваријантна функција на спрега може да биде триплетната функција $q_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ која што го опишува заедничкото влијание на три фазни осцилатори врз некој осцилатор. Вакви заеднички функционални зависимости може да се појават како кластери од подмрежи во некоја мрежа.

Мултиваријантните заемнодејства во последните години побудуваат значителен интерес, особено во развојот на методи за детекција на спрегите. Ова произлегува од потребите на проучувањето на мрежите, каде што доколку се разгледуваат само врските меѓу паровите системи, можно е да се превиди дел од заемнодејствата кои имаат големо влијание врз мрежното поведение.

Мултиваријантните функции на спрега се проучувани при инференција на мрежи со мал број системи, каде што структурните спреги може да се разликуваат од инферираните ефективни спреги. Така, Кралеман со соработниците [79] разгледувал мрежа од три ван дер Полови осцилатори, каде што како дополнување на спарените спреги, била разгледувана и заедничка мултиваријантна функција на спрега од облик $\varepsilon x_2 x_3$, во динамиката на првиот осцилатор $\dot{x}_1$. Поради ваквата спрега, ефективната фазна функција на спрега има мултиваријантна триплетна природа. Со екстракција на фазите и користење на методи на инференција, реконструирани се ефективните фазни спреги и преку споредба на инферираните и вистинските параметри било потврдено дека доколку се земат во предвид само биваријантните заемнодејства, а не и мултиваријантните, инференцијата не би била соодветна и би појавила дополнителен непостоечки биваријантен член. Како последица на ваквите истражувања откриена е триплет синхронизацијата [20], чие постоење е можно дури и кога секој пар од системите останува асинхрон.

Ваквите методи се од големо значење за истражувањата на мозокот во невронауката, каде што заемнодејствата помеѓу осцилациите во различни фреквентни интервали се означуваат како спреги на вкрстени фреквенции. Во 2015 година Станковски со соработниците [80] инферира неврални функции на спрега на вкрстени фреквенции од мултиваријантни мрежи. Преку реконструкција на мултиваријантна фазна динамика биле анализирани мрежните заемнодејства помеѓу петте мозочни осцилации $\delta, \theta, \alpha, \beta$ и γ . Притоа е утврдено дека влијанието од θ осцилациите врз γ осцилациите е поголемо отколку влијанието на α осцилациите и дека постои значително забрзување на γ осцилациите кога θ фазниот циклус се менува од π на 2π .

3.1.7 Воопштеност на функциите на спрега

Од теориски аспект, функциите на спрега се точно одредени, во смисла дека кога го знаеме моделот, функцијата на спрега е еднозначна и непроменлива. Решенијата на диференцијалните равенки зависат континуирано од функцијата на спрега и притоа, при ограничени временски интервали, мали промени на функциите на спрега ќе придонесат за мали промени на решенијата. Доколку решенијата се експоненцијално и рамномерно брзо привлечени до некое множество, мали промени во спрегата нема да влијаат на стабилноста на системот.

Кога целта е да се инферираат функциите на спрега од мерни или нумерички податоци, добивањето на еднозначен резултат не е така едноставно. Вообичаено, при мерењата се добиваат само проекции на функциите на спрега, што може да доведе до нееднозначност при нивната проценка. Имено, функцијата, која е бесконечно димензионална, се проектира на конечно димензионален векторски простор и притоа може да се изгуби дел од информацијата, како последица на што нема да биде можна еднозначна проценка на функцијата, дури и ако се занемарат шумот и пертурбациите. Исто така, конечната форма на функцијата на спрега зависи од изборот на базните функции и нивниот број. Така на пример, изборот на Фуриеови серии како базни функции, наспроти избор на полиномни функции, може да влијае на конечната проценка на функцијата. Изборот, кои базни функции ќе се користат, е неограничен. Иако многу аспекти на функциите на спрега, како на пример бројот на аргументи, декомпозицијата со соодветен модел, анализата на нивните компоненти и друго, може да се применат со голема воопштеност, сепак тие во основа не можат да се одредат еднозначно.

Во литературата често пати се говори за вообичаено користени функции на спрега, од кои дел се прикажани во Табела 3.1.

Табела 3.1 – Вообичаено користени функции на спрега.

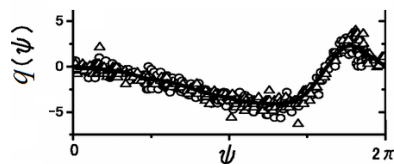
Тип на функција на спрега	Модел	Значење	Референца
Директна	$q(x, y) = q(y)$	Еднонасочно влијание	[81]
Дифузна	$q(x, y) = q(y - x)$	Зависност од разлика на состојби	[3]
Реактивна	$q(x, y) = (\varepsilon + i\beta)q(x - y)$	Комплексна јачина на спрега	[82]
Коњугирана	$q(x, y) = q(x - Py)$	P ја пермутира променливата	[83]
Хемиска синапса	$q(x, y) = g(x)S(y)$	S е сигмоидална	[84]
Животна средина	$q(x, y) \approx \int_0^t e^{-k(t-s)} [x(s) + y(s)] ds$	Зададена со диференцијална равенка	[85]

Кај реактивната и дифузната функција на спрега од табела 3.1, спрегата има иста форма, а разликата е дека реактивниот случај содржи комплексни амплитуди. Како резултат на тоа се јавува фазна разлика помеѓу спрегата и динамиката. Исто така, во литературата, дифузната функција на спрега која задоволува локален услов изводот $q'(0) < 0$, се вика дисипативна спрега. Ваквиот услов личи на Фиковиот закон кога спрегата го присилува системот да конвергира кон истата состојба. Кога изводот $q'(0) > 0$, спрегата се нарекува одбивна. Значајна форма на спрега се хемиските синапси, каде што влијанието на променливите x и на y се манифестира преку нивен производ. Во спрегата кај животната средина, функцијата е дадена како решение на диференцијална равенка. Во овој случај се разгледува равенка $\dot{y} = -ky + \varepsilon[x(t) + y(t)]$ за $k > 0$, така што променливите се сметаат за надворешно поле кое ја пертурбира равенката. Нејзиното решение $y(t) = y(t; x, y)$ се зема за функција на спрега и во табелата 3.1 е дадена за $t \gg 1$. Воопштеноста на функциите на спрега и фактот дека нивната форма припаѓа на неограничено множество функции е искористено за конструкција на криптиран клуч во протокол за сигурна комуникација [40].

3.1.8 Механизми на функциите на спрега

Формата на функцијата е квалитативна карактеристика која дефинира извесен механизам и се однесува како дополнителна димензија додадена на квантитативните карактеристики како што се јачината на спрегата, насоченоста, параметрите на фреквенцијата и параметрите на граничниот циклус. Механизмот, по дефиниција, претставува некаква функција или процес кој доведува до промена на разгледуваниот систем. Значењето на механизмот е дека тој може да доведе до квалитативен премин на системот и да предизвика или да намали некои физички ефекти како на пример синхронизација, нестабилност, амплитудна или осцилаторна смрт.

Прва и основна улога на механизмот на функцијата на спрега е да ја објасни природата на заемнодејствата во системот кој се разгледува. Така на пример, функцијата на спрега на хемискиот осцилатор на Белусов и Жаботински е реконструирана [86] со помош на метод за инференција на фазната динамика. Функцијата на спрега прикажана на слика 3.7, преземена од [86], е реконструирана во однос на фазната разлика $\psi = \phi_2 - \phi_1$ и има форма која воопшто не личи на синусна форма. Таа постепено се намалува во регионот на мали фазни разлики, потоа нагло расте при поголеми фазни разлики и има минимум околу $5\pi/4$ и максимум околу $7\pi/4$.



Слика 3.7 – Функција на спрега одредена од фазната динамика на два Белусов-Жаботински хемиски осцилатори. Функцијата на спрега е реконструирана во однос на фазната разлика ψ .

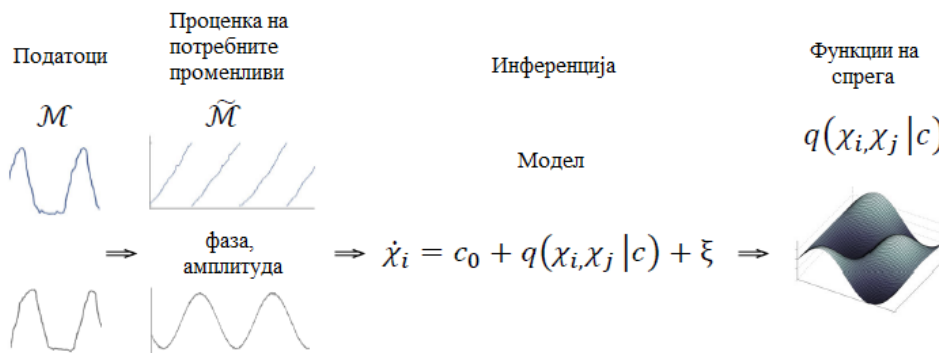
Друг значаен пример се функциите на спрега кои се користат во науката за нервите. Кај невронските интеракции некои променливи имаат поведение слично на делта функција, со високи и тесни врвови. Невралните функции на спрега, кои се конволуција на криви на фазен одговор и на пертурбациони функции, зависат пред сè од кривите на фазен одговор, па затоа и механизмот на заемнодејството е дефиниран од овие криви.

Механизмот на функциите на спрега зависи од различните придонеси од индивидуалните осцилатори. Промените во формата можат да зависат првенствено од едната фаза, но, можат да зависат и истовремено од двете фази, што резултира со сложена и интуитивно нејасна зависност. Механизмот одреден од формата на функцијата може да се искористи за разликување на индивидуалните функционални придонеси во спрегата. Може да се спроведе декомпозиција на функцијата на спрега на компоненти кои ги опишуваат сопствените, директните и индиректните влијанија. Сопствените спреги ги опишуваат внатрешните динамики на осцилаторот кои се резултат на заемнодејствата и немаат големо физичко значење. Директните спреги го опишуваат директното влијание од едниот на другиот осцилатор. Индиректните спреги, кои често се нарекуваат и заеднички спреги, зависат од заеднички придонеси од двата осцилатори. Еден таков пример е дифузната спрега одредена од членови кои се функции од фазната разлика. Со воопштување на декомпозицијата на функционалните спреги на повеќе варијабилни функции на спрега, ќе се појави и ќе може да се одреди и директната спрега од два осцилатори кон третиот и пошироко.

По осознавање на деталите на реконструираниите функции на спрега, добиените сознанија може да се искористат за детектирање и проучување на физичките ефекти на заемнодејствата. Па така, со користење на функциите на спрега како онаа илустрирана на слика 3.7, може да се објасни синхронизацијата на два спрегнати Белусов-Жаботински реактори. Механизмите и формата на функциите на спрега може да се искористат за конструкции на сложени динамички структури, а сознанијата за механизмите на реконструираниите функции може да предвидат и премини низ различните состојби на физичките ефекти како на пример синхронизацијата.

3.2 Методи за реконструкција на функциите на спрега

Инференцијата на функциите на спрега вклучува анализа на податоци со цел реконструкција на динамички модел кој ги опишува заемнодејствата. Главниот столб на процедурата, која често се нарекува динамичко моделирање или динамичко филтрирање, е методот за динамичка инференција. На слика 3.8 се прикажани главните чекори при одредувањето на функциите на спрега.



Слика 3.8 – Шематски приказ на процедурата за инференција на функциите на спрега: Од податоците $\mathcal{M}$ се врши проценка на променливите $\tilde{\mathcal{M}}$ потребни за спроведување на инференцијата (на пример фазите или амплитудите), потоа се инферира динамичкиот модел и од таа инференција се добиваат функциите на спрега.

Се почнува со податоците $\mathcal{M}$ добиени од два или повеќе динамички системи и од нив се врши проценка на соодветните променливи $\tilde{\mathcal{M}}$, на пример фазите или амплитудите, кои се потребни за спроведување на инференцијата. Понатаму, со користење на методот на инференција се инферира динамички модел од кој се добиваат функциите на спрега. Податоците $\mathcal{M}$ вообичаено се просторни амплитудни сигнали кои се динамички мерени и ја опишуваат временската еволуција на системот. Многу често неопходна е некаква обработка на мерените податоци за да може да се користат во процедурата за инференција. Така, на пример, ако системите имаат осцилаторна природа, најчесто е потребно од мерените податоци да се проценат фазите на периодичните сигнали. Некогаш е потребно и дополнително претпроцесирање, како на пример филтрирање во даден интервал, отстранување на артефакти, потиснување на шумот, филтрирање на фреквенцијата на градската напонска мрежа, отстранување на влијанија од познати извори кои не се од интерес и друго. Обработените сигнали понатаму претставуваат влезни величини за методот на инференција.

Целта на инференцијата е да се реконструира модел кој го опишува динамичкиот систем. Таа или е дадена со систем ОДР, или, доколку се разгледува и динамички шум, со стохастички диференцијални равенки. На слика 3.8 моделот е претставен преку општата променлива χ , иако во пракса моделот вообичаено го користи или амплитудниот или

фазниот домен. Динамиката на системот се моделира со множество базни функции кои вообичаено се линеарно независни. Еден таков пример за базни функции може да биде Фуриеова серија на синусни и косинусни функции. Базните функции може да бидат линеарни или нелинеарни и вообичаено се одредени од множество параметри c кои вообичаено се скалирачки параметри. На таков начин, комбинациите на базните функции, соодветно параметризирани со параметрите c , ги даваат и функциите на спрега.

Базните функции се дел од моделот за кој се смета дека е однапред познат, па главната задача на методот на инференцијата се состои во одредување на параметрите c , од податоците $\tilde{M}$ за дадениот модел диференцијални равенки $\dot{X}$. Изборот на вистинскиот модел често пати е една од главните потешкотии, особено доколку динамичкиот систем не поседува некои општи карактеристики, но за таа цел постојат повеќе методи за оптимален избор на моделот. При познат модел и познати податоци може да се користат различни методи на инференцијата, кои во некои случаи значително се разликуваат по своите карактеристики.

Еден од овие методи е и методот за ДБИ, кој зазема централно место во оваа докторска дисертација, поради што ќе биде детално разработен во следната глава. Во продолжение на ова поглавје, ќе бидат презентирани дел од останатите позначајни методи за инференција на функциите на спрега.

3.2.1 Моделирање преку фитување со метод на најмали квадрати

Една од првите статии која се занимава со реконструкција на функциите на спрега е онаа на Розенблум и Пиковски од 2001 година [45]. Нивната инференција на заемнодејството се заснова на процедура за фитување со методот на најмали квадрати, која е применета на фазната динамика на осцилатори кои заемнодејствуваат. Главната цел на овој труд е детекција на спрегата и нејзината насоченост, но сепак, како дел од резултатите се добиваат функции чија форма наликува на формата на функциите на спрега.

Нивната техника вклучува експериментална детекција на насоченоста на слабата спрега помеѓу два самоодржувачки осцилатори, од биваријантни податоци. Притоа, тие поаѓаат од сознанието дека слабата спрега влијае пред сè на фазите на осцилаторите, а не на нивните амплитуди. Главната идеја е да се истражи и квантифицира дали фазната динамика на едниот од осцилаторите е под влијание на фазата на вториот осцилатор. За таа цел, тие го фитуваат моделот на фазни осцилатори на Курамото [3], даден со равенките 3.3, на биваријантни фазни податоци. Од инферираниот модел и параметри понатаму може да се квантифицира спрегата во едната или другата насока.

Најпрво, за секоја временска точка од фазната временска серија, ги пресметуваат инкрементите $\Delta_{1,2}(k) = \phi_{1,2}(t_k + \tau) - \phi_{1,2}(t_k)$, каде што величината τ е слободен

параметар. Овие инкременти $\Delta_{1,2}(k)$ се смета дека се генерирани од непозната дводимензионална мапа

$$\Delta_{1,2}(k) = \mathcal{F}_{1,2}[\phi_{1,2}(k), \phi_{2,1}(k)]. \quad (3.16)$$

Функциите $\mathcal{F}_{1,2}[\phi_{1,2}(k), \phi_{2,1}(k)]$ се декомпонирани во Фуриеови серии и нивните зависимости $\Delta_{1,2}(k)$ од фазите ϕ_1 и ϕ_2 се моделирани со процедура за фитување базирана на методот на најмали квадрати. Како базни функции за фитувањето се користени Фуриеовите серии

$$\mathcal{F}_{1,2} = \sum_{m,l} A_{m,l} e^{im\phi_1 + il\phi_2}, \quad (3.17)$$

каде што индексот $|l| \leq 3$ за индекс $m = 0$, индексот $|m| \leq 3$ за индекс $l = 0$ и дополнително индексите $|l| = |m| = 1$.

Ваквата идеја е слична на динамичка инференција на ОДР, каде што инкрементите $\Delta_{1,2}(k)$ наликуваат на Ојлеровиот метод за диференцирање од прв ред кој е од облик $\Delta_{Euler,1,2}(k) = [\phi_{1,2}(t_{k+1}) - \phi_{1,2}(t_k)]/h$, каде што величината h е чекорот на семплирање, односно диференцирање. На тој начин функциите $\mathcal{F}_{1,2}[\phi_{1,2}(k), \phi_{2,1}(k)]$ се слични на функциите на спрега $q_{1,2}(\phi_1, \phi_2)$, односно тие се блиски до формата на функциите на спрега, со блиски релативни, но не и апсолутни јачини на спрега. И покрај разликите, ова се првите инферирани функции на спрега за осцилаторните заемнодејства.

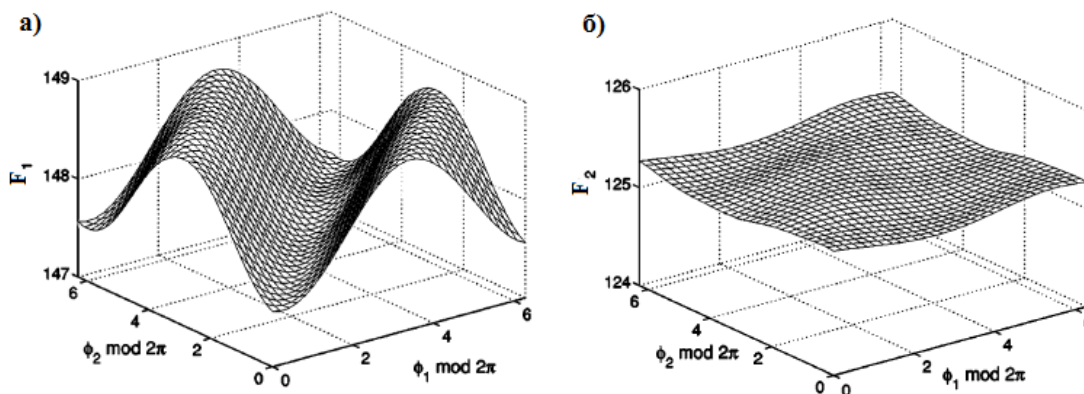
Самата инференција е спроведена со фитување со метод на најмали квадрати, кој е широко користен метод за фитување на крива низ дадено множество точки. Главната цел на фитувањето се состои во прилагодување на параметрите на функцијата-модел за нејзино најдобро совпаѓање со дадените податоци. Резултатот на фитувањето е проценка на вредностите на параметрите на моделот, при познат модел и базни функции. За одредување на проценките на параметрите, методот на најмали квадрати врши минимизирање на сумата од квадрати на остатоци. Остатокот $\wp(k)$ за k -тата точка е дефиниран како разлика помеѓу инкрементот $\Delta(k)$ и неговата фитувана вредности $\tilde{\Delta}(k)$ и всушност ја претставува грешката на фитувањето. Сумата на квадратите на остатоците е дадена со:

$$\mathcal{O} = \sum_k \wp^2(k) = \sum_k [\Delta(k) - \tilde{\Delta}(k)]^2. \quad (3.18)$$

Минимизирањето на остатокот $\mathcal{O}$ ја дава инференцијата на параметрите, а тоа се спроведува преку парцијална диференцијација во однос на секој параметар и изедначување на добиениот резултат на нула. Ваквите постапки вклучуваат линеарно фитување, фитување со различни тежини или нелинеарно фитување, а подоцна се

воспоставуваат и процедури на фитување базирани на проценка на густина на кернел [87]. Конечно инферираните параметри применети на базните функции на моделот ги даваат експлицитните облици на функциите $\mathcal{F}_{1,2}[\phi_{1,2}(k), \phi_{2,1}(k)]$.

Еден ваков пример за формата на функциите $\mathcal{F}_{1,2}[\phi_{1,2}(k), \phi_{2,1}(k)]$ е даден на сликата 3.9. Во овој пример, преземен од [43], е разгледуван моделот на Курамото [3] во присуство на бел Гаусов шум.



Слика 3.9 – Реконструирани функции на фазни заемнодејства. а) Функцијата на спрега за влијанието од вториот врз првиот осцилатор. б) Функцијата на спрега за влијанието од првиот врз вториот осцилатор.

Фитувањето со методот на најмали квадрати не го инферира шумот, кој во примерот е користен само за внесување на непрецизност. На сликата се прикажани две функции реконструирани според овој метод. На слика 3.9 а) се гледа дека формата на реконструираната функција $\mathcal{F}_1(\phi_1, \phi_2)$ која го претставува влијанието од вториот на првиот осцилатор наликува на дијагоналната брановидна форма на вистинската функција на спрега $\sin(\phi_2 - \phi_1)$, прикажана на слика 3.5 а). Истовремено, јачината, односно амплитудата на функцијата $\mathcal{F}_2(\phi_1, \phi_2)$ која го прикажува влијанието од првиот на вториот осцилатор, прикажана на слика 3.9 б) е значително помала, поради послабата јачина на спрегата.

3.2.2 Метод на проценка на максимална сличност со повеќекратни обиди

Еден од методите за реконструкција на функциите на спрега, применет при истражување на електрохемиските заемнодејства [47, 88] е со користење на техниките за проценка на максимална сличност. Притоа е користена техника на проценка на максимална сличност наречена техника на повеќекратни обиди.

Техниките на проценка на максимална сличност се статистички методи на потрага по веројатносна распределба која доведува до најверојатни набљудувања. Тоа всушност

значи дека треба да се најде онаа вредност на векторот параметри која ја максимизира функцијата на сличност. Постапката на максимизирање доведува до најдобро совпаѓање на избраниот модел со набљудуваните податоци и за дискретни случајни променливи ја максимизира веројатноста за набљудувањата при разгледуваната распределба. Ваквата проценка на максимална сличност дава унифициран пристап кон проценката на параметрите, кој е добро дефиниран за случај на нормална распределба, а и во други случаи. Има големо влијание на теоријата за инференција и е основа на многу техники на инферентната статистика.

Разликата на оваа техника од фитувањето со користење на методот на најмали квадрати е фундаментална, бидејќи оваа техника ги бара најверојатните параметри, додека фитувањето со метод на најмали квадрати е описна техника која ги бара параметрите кои доведуваат до најточен опис на податоците. Но, постојат случаи кога двете техники доведуваат до исти инферирани параметри, а таков е случајот кога набљудувањата се меѓусебно независни и се нормално распределени со константна варијанса [89].

Методот на повеќекратни обиди кој се користи за реконструкција на функциите на спрега се базира на ваквата техника на проценка на максимална сличност. Еден познат пристап на инференција на траектории и параметри е со користење на пристап на почетни услови, каде што се бираат почетни претпоставки за состојбите на системот и за параметрите на моделот, по што нумерички се решаваат диференцијалните равенки. Но, во таков случај може да се јави проблем на конвергенција на траекторијата до локален максимум. Техниката на повеќекратни обиди дава можно решение на тој проблем. Во овој пристап, почетните услови се проценуваат за повеќе точки долж временската серија, на тој начин обезбедувајќи проценетите траектории да останат поблиски до нивните вистински вредности подолго време. Ваквиот проблем се смета за проблем на гранична вредност во повеќе точки. Притоа интервалот на фитување (t_1, t_N) се дели на m подинтервали: $t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m+1} = t_N$. За секој подинтервал (τ_j, τ_{j+1}) се воведуваат локални почетни услови $x_j = x(\tau_j)$ како дополнителни параметри. Во случај на независен Гаусов шум, максимизацијата на сличноста се сведува на минимизација на функција на трошок $\zeta^2(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathbf{c})$ која е тежинска сума од квадратите на остатоците помеѓу податоците и траекториите на моделот, со тежини инверзни варијанси на шумот:

$$\zeta^2(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - G(x_i(x_1, x_2, \dots, x_m, \mathbf{c}), \mathbf{c})]^2}{\sigma_i}, \quad (3.19)$$

каде што величините x и y се просторните променливи и набљудувањата соодветно, величината G е функцијата на динамиката, а величините σ_i ја даваат варијансата на шумот. На таков начин, во методот на повеќекратни обиди динамичките равенки се интегрирани на делови по што се проценува и минимизира функцијата на трошок на повеќе примероци од секој подинтервал.

Ако се претпостави дека динамичките параметри $\mathbf{c}$ се постојани на целиот интервал, локалните почетни услови се посебно оптимизирани во секој подинтервал. Тоа доведува до првобитно дисконтинуирана траекторија, поради што последниот чекор во постапката е нивно линеаризирање кое доведува до континуирани состојби. Оваа постапка се нарекува кондензација и се спроведува со користење на обопштен Гаус-Њутнов метод.

Оваа техника е користена за моделирање на фазната динамика на електрохемиски осцилатори кои заемнодејствуваат, со цел реконструкција на нивните функции на спрега [47], при што како базни функции се користени Фуриеови серии.

3.2.3 Метод на случајно фазно ресетирање

Методот на случајно фазно ресетирање, предложен од Левнајик со соработниците [51], може да се користи за динамичка инференција на системи кои заемнодејствуваат и за реконструкција на функциите на спрега. Методот е првобитно дизајниран за реконструкција на мрежна топологија, односно за инферирање на јачини на спреги, но бидејќи методот вклучува динамичка инференција, инферираниот модел овозможува реконструкција и на функциите на спрега. Главната идеја на методот се состои во повеќекратно реиницијализирање на мрежната динамика, преку случајни фазни ресетирања, со што се создава ансамбл на почетни динамички податоци. Величините добиени со усреднување на овој ансамбл ги откриваат бараните детали за структурата на мрежата и за функциите на спрега.

Методот разгледува динамички модел на спрегнати фазни осцилатори, како оној на Курамото [3] даден со равенките 3.3, каде што функциите на спрега се дадени во однос на фазната разлика $q_i(\phi_j - \phi_i)$. Динамиката почнува од множество почетни фази означени како $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), (t = 0)$ избрани од распределба $\hat{h}(\boldsymbol{\phi}) > 0$ нормализирана на $(2\pi)^N$. Методот се базира на две претпоставки: прво, дека мрежната динамика може да се реиницијализира $\mathcal{K}$ пати со независно ресетирање на фазите на сите јазли до нова состојба $\boldsymbol{\phi}$ и второ, дека може да се измерат сите вредности $\boldsymbol{\phi}_l$ и сите моментни фреквенции $\dot{\phi}_l, l = 1, 2, \dots, \mathcal{K}$, при секоја реиницијализација на динамиката. Како влез е дадена 2π периодична тест функција $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\phi_i - \phi_j)$ со нулта средна вредност, додека функциите на спрега се претставени со Фуриеови серии. Се користи индекс:

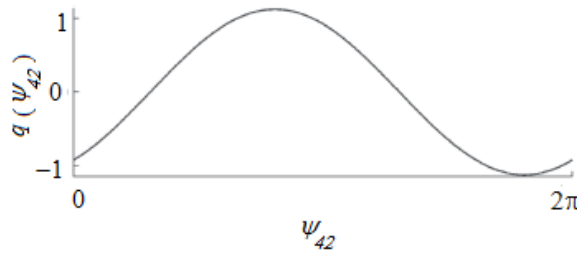
$$Y_{ij}[\mathcal{T}] = (2\pi)^{-N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0, 2\pi]^N} d\boldsymbol{\phi} \mathcal{T}(\phi_i - \phi_j) \times [a_{kj}^n \sin(n\phi_k - n\phi_j) + b_{kj}^n \cos(n\phi_k - n\phi_j)]. \quad (3.20)$$

Динамичката мрежа опишана со фазните равенки може да се реконструира преку пресметување на индексот Y_{ij} за погодна форма на $\mathcal{T}$ функцијата, на пример формата

$\mathcal{T}(\phi) = e^{i n \phi}$. Практичната имплементација вклучува претставување на изводите на фазите $\dot{\phi}_l$ со измазнувачки кернел и со соодветно усреднување се добива индексот $\gamma_{ij}[\mathcal{T}]$:

$$\gamma_{ij}[\mathcal{T}] = \left\langle \frac{\dot{\phi}_j \mathcal{T}(\phi_i - \phi_j)}{\hbar(\phi)} \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{l=1}^{\mathcal{K}} \frac{\dot{\phi}_j(\phi_l) \mathcal{T}(\phi_i - \phi_j)}{\hbar(\phi_l)}. \quad (3.21)$$

За да се симулира експериментална ситуација се спроведуваат $\mathcal{K}$ случајни фазни ресетирања разделени со временски интервали τ . Во трудот на Левнајќ [51] е разгледувана мрежа од четири осцилатори. По спроведување на инференцијата со предложениот метод, реконструираниите спарени врски се добиле слични на вистинските спрегнати вредности. Методот особено се покажал корисен за детекција на отсуство на спрега. По инферирањето на параметрите на моделот a_{ij}^l и b_{ij}^l може да се реконструира и формата на функцијата на спрега и еден таков пример е прикажан на сликата 3.10, каде што е прикажано влијанието на четвртиот осцилатор врз вториот.



Слика 3.10 – Инференција со користење на методот на случајно фазно ресетирање. Прикажана е функцијата на спрега во однос на фазната разлика $\psi_{42} = \phi_2 - \phi_4$.

Силната страна на овој метод е дека се инферираат и топологијата и функцијата на спрега, додека слабата страна е инвазивноста на методот, бидејќи мора да се наруши испитуваната динамика на системот преку фазни ресетирања, што при реалните експерименти некогаш не е можно да се изведе.

3.2.4 Стохастичко моделирање на ефективни функции на спрега

Значајна карактеристика на динамиките кај реалните системи е присуството на динамичкиот шум. Поради тоа земањето во предвид на стохастичката природа на динамиките кои заемнодејствуваат овозможува подобро опишување на функциите на спрега и влијанијата врз нив. Еден од методите кој разгледува стохастички динамики е методот на ДБИ кој е опширно образложен во следната глава. Во некои случаи, при разгледување на осцилации предизвикани од шумот, целта е одредување на ефективни функции на спрега кои го вклучуваат влијанието на шумот. При разгледување на ефективна фазна динамика со инваријантна фаза дефинирана на непертурбиран начин,

фазата ќе зависи од интензитетот на шумот, а со неа и сите останати карактеристики, меѓу кои и функциите на спрега.

Швабадел и Пиковски [48] разгледувале ефективен фазен модел кој опишува периодични осцилации предизвикани од шум:

$$\dot{\theta} = h(\theta) + g(\theta)\xi(t) + f(\vartheta(t), \theta), \quad (3.22)$$

каде што величината $\vartheta(t) = \Omega t$ е 2π периодична побудувачка фаза. Целта е да се опише ефективната фазна динамика $\mathcal{H}(\theta, \vartheta)$ и соодветната ефективна функција на спрега. Ефективната динамика опишана со равенката 3.22 може да се изрази како $\dot{\theta} = \mathcal{H}(\theta, \vartheta) = \mathcal{H}_m(\theta) + \mathcal{F}(\theta, \vartheta)$, каде што функцијата $\mathcal{H}_m(\theta)$ е ϑ -независна маргинална ефективна брзина, а функцијата $\mathcal{F}(\theta, \vartheta)$ е ефективната функција на спрега. Ефективната брзина $\mathcal{H}_m(\theta)$ може да се одреди со интегрирање на равенката 3.22 по фазата ϑ . Користејќи дека ефективната функција на спрега е $\mathcal{F}(\theta, \vartheta) = \mathcal{H}(\theta, \vartheta) - \mathcal{H}_m(\theta)$, таа може да се одреди како:

$$\mathcal{F}(\theta, \vartheta) = f - \int_0^{2\pi} f \frac{P}{P_m} d\vartheta - g^2 \partial_\theta \ln \frac{P}{P_m}, \quad (3.23)$$

каде што функциите $P = P(\theta, \vartheta)$ и $P_m = P_m(\theta)$ се густините на веројатност за целосната и за маргиналната динамика, соодветно. Променливата θ може да се смета за протофаза и може понатаму да се трансформира како $\phi = \mathcal{C}(\theta) = 2\pi \int_0^\theta P(\eta) d\eta$ за да се добие инваријантната ефективна фазна динамика:

$$\dot{\phi} = \omega + 2\pi P_m[\mathcal{C}^{-1}(\phi)] \mathcal{F}[\vartheta \mathcal{C}^{-1}(\phi)] = \omega + q(\vartheta, \phi). \quad (3.24)$$

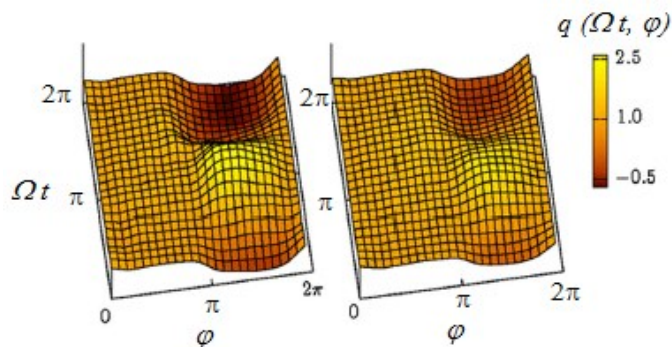
Равенката 3.24 ја дава ефективната фазна динамика на осцилатор периодично побуден од шумот со ефективна функција на спрега која зависи од интензитетот на шумот.

На слика 3.11 се прикажани некои од резултатите од анализата на Фиц Хју – Нагумо моделот за осцилатор побуден од шумот даден со равенките 3.25:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x + a + \sigma \xi(t) + b \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

каде што функцијата $\xi(t)$ е адитивен шум кој ги индуцира осцилациите, а косинусната функција го дава заемнодејството на системот. По проценката на временската серија на протофазите θ и нејзината трансформација во фаза ϕ , може да се одреди ефективната функција на спрега $q(\Omega t, \phi)$. За таа цел е користена двојна декомпозиција во Фуриеова

серија со фитување на моделот со податоците, по метод на најмали квадрати. Резултатите од анализите покажуваат зголемување на ефективната спрега при исчезнување на шумот.



Слика 3.11 – Функции на спрега кај осцилации побудени од шум во моделот на Фиц Хју - Нагумо за два различни интензитети на шумот.

На сликата 3.11 ефективната функција на спрега е пресметана за два различни интензитети на шумот, при иста јачина на спрега. Може да се види дека амплитудата на функцијата на спрега опаѓа со растење на интензитетот на шумот.

3.3 Анализа на функциите на спрега

По инферирањето и реконструкцијата на функциите на спрега, следен чекор е анализа на нивните квантитативни величини и изведување на заклучоци, често пати засновани на споредба со претходни податоци. Ваквите заклучоци се од големо значење за истражувањата кои се спроведуваат на реалните системи во природата. На пример, биомедицинскиот експериментатор кој проучува некој систем во човековиот организам, врз основа на анализата на функциите на спрега може да цели кон разграничување на состојби на здрав организам од патолошки состојби. За таа цел потребно е квантификување на некои карактеристики кои ги опишуваат функциите на спрега, особено карактеристики кои се среќаваат само кај нив и не можат да бидат одредени на друг начин. Бидејќи формата на функцијата на спрега го опишува механизмот на заемнодејството, очигледно е дека нејзино квантификување би било од значителен интерес за различните полиња на примена.

Иако проблемот на квантификување на функција не е тривијален, кај функциите на спрега тој се поедноставува поради нивната декомпозиција. Во голем дел од методите за нивна реконструкција, функциите на спрега се декомпонираат, на пример во Фуријеови серии, па поради тоа проблемот се сведува на квантификување на нивните компоненти и уште понатаму, на квантификување на параметрите добиени за соодветните компоненти.

На таков начин проблемот на квантификување на функциите на спрега се сведува на проблем на квантификување на еднодимензионален вектор од параметри.

Еден начин за вакво квантификување е преку корелациони коефициенти и мерки за различност евалуирани од инферираните функции на спрега [27]. Индексот на сличност, ρ , ја покажува сличноста на две функции на спрега q_1 и q_2 , независно од јачините на спрегите. Овој индекс се одредува како корелационен коефициент:

$$\rho = \frac{\langle \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \rangle}{\|\tilde{q}_1\| \|\tilde{q}_2\|}, \quad (3.26)$$

каде што аголната заграда $\langle \cdot \rangle$ означува просторно усредување по дводимензионалниот домен $0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 2\pi$, симболот $\tilde{q} = q - \langle q \rangle$ и симболот $\|q\| = \langle qq \rangle^{1/2}$. Индексот на сличност е од значаен интерес бидејќи се однесува само на формата на функцијата и претставува уникатна мерка за функциите на спрега. На сличен начин се дефинира мерка за различност:

$$\eta = \frac{\|\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\|}{\|\tilde{q}_1\| + \|\tilde{q}_2\|}. \quad (3.27)$$

Мерката за различност е од помал интерес од индексот на сличност, бидејќи се однесува на јачините на спрегите, кои можат да бидат евалуирани и на други начини, преку други мерки.

Овие две мерки Кралеман [27] ги користел за анализирање на сличноста и разликата на функциите на кардиореспираторната спрега во човековиот организам. Со нивно користење утврдена е висока корелација помеѓу функциите на спрега за ист субјект во различни обиди, а не толку висока корелација за различни субјекти во ист обид. Станковски [80] го користел индексот на сличност за квантификување на формата на мозочните функции на спрега, квантификувајќи значителни разлики во формата на функциите при користење на различни анестетици [44].

3.4 Примена на функциите на спрега

Иако функциите на спрега како сопствени ентитети се релативно нови, нивната примена и примената на методите за нивна реконструкција се широко распространети при проучувањето на заемнодејствата меѓу системите од различна природа, како и при практичното користење на добиените сознанија.

Една од нивните примени е при проучувањето на интеракциите на хемиските осцилатори. Во тие рамки, Кис со соработниците [38] ги користат функциите на спрега помеѓу електрохемиски осцилатори за креирање на комплексни динамички структури. За побудување на електрохемиските осцилации тие ги користат потенцијалите на

електродите при растворање на жици од никел во сулфурна киселина. Во нивната работа, избираат функции на спрега од одреден облик за постигнување на некоја конкретна состојба. Разгледувајќи систем од 4 осцилатори групирани во два кластери од по два осцилатори, нивниот фазен модел ги предвидува премините помеѓу различни состојби во и меѓу кластерите, кои биле и експериментално набљудувани. Мизијаки и Киношита [86] ги проучуваат заемнодејствата на хемиските осцилатори на Белусов-Жаботински, при што инферираните функции на спрега ги опишуваат механизмите на различните синхронизирани состојби на два спрегнати осцилатори од овој вид.

Втора значајна примена на функциите на спрега е при проучување на спрегите во човековиот организам. Значителни истражувања се спроведуваат за опишување на кардиореспираторните спреги и влијанијата кои ги имаат на физиолошките состојби на организмот. Така, на пример, Станковски [44] го испитува влијанието на општата анестезија врз кардиореспираторните функции на спрега, Јатсенко [24] го испитува влијанието на стареењето врз кардиореспираторните заемнодејства, додека Кралеман [27] ги разгледува кардиореспираторните функции на спрега при добивање на криви на фазен одговор на срцето при пертурбации од респирацијата. Поле на истражување од голем интерес е и мозочната електрофизиолошка активност, каде што се направени истражувања на таканаречените крос-фреквентни спреги при кои се проучувани различни когнитивни состојби.

Проучувањата на заемнодејствата во механиката иако почнуваат од XVII век, со проучувањата на Хајгенс на синхронизирањето на ѕидни часовници, продолжуваат до денес, со сеопфатни и детални студии кои се базираат на современи методи [90]. Кралеман [87] опишува експеримент со два спрегнати механички метрономи за анализа на функциите на спрега, нивната форма и јачина, при различни видови на спреги.

Декомпозицијата на функциите на спрега во различни независни функции овозможува и нивно користење во областа на сигурносната комуникација. Развиен е протокол [40] за енкриптирање на сигнали, при што функциите на спрега го сочинуваат приватниот клуч неопходен за сигурна комуникација.

Функциите на спрега се применети дури и во општествените науки [39] за проучување на поврзаноста помеѓу демократијата, изразена преку индексот на демократија на организацијата Кука на слободата („Freedom House“), и економскиот развој, изразен преку бруто домашниот производ по човек преземен од Светската банка.

4. ДИНАМИЧКА БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА

Осцилаторните системи кои стапуваат во меѓусебни заемнодејства се широко распространети во природата. Научниот метод, заснован на систематско набљудување и анализа на добиените резултати, тежи да ги осознае појавите застапени во природата и да овозможи нивно користење со цел унапредување на колективното знаење и секојдневниот живот. Еден од основните начини преку кои ја остварува таа цел е преку креирање на модели кои ги опишуваат конкретните природни појави и процеси. Често пати моделите се засноваат на серии на податоци собрани во одреден временски период. Вообичаено и самата анализа на податоците се прави со поедноставување на истражувањето преку анализирање на добиените податоци од мерењата во последователни блокови. Оваа метода на секвенцијална анализа е заснована од статистичката истражувачка група на Универзитетот на Колумбија за време на Втората светска војна со цел поефикасна контрола на квалитетот во индустриите најсуштински за воените дејства. Развојот на секвенцијалната анализа на податоците оттаму се шири во најразлични полиња на техничко технолошкиот и на научниот развој на човештвото, вклучително и во теоријата која ги проучува динамичките системи.

Една голема класа методи користени за секвенцијална анализа е заснована на Баесовата теорија [91]. Во неа се користи Баесовата теорема која се заснова на идејата за користење на сознанијата од претходните секвенци за повалидна проценка на параметрите на моделот во тековната секвенца. На ваков начин, во секоја следна секвенца изведениот заклучок сè посигурно одговара на вистинитиот. Постојат повеќе методи кои ја користат Баесовата теорема за спроведување на таканаречена Баесова инференција [40, 46, 77, 92-95]. Од интерес за оваа теза е методот на ДБИ [30, 31, 46] кој овозможува инференција на динамички модел опишан со стохастички диференцијални равенки од временски серии на податоци, добиени со мерења на некои излезни величини од динамичкиот систем кој се истражува. Тој дава основа за техники за процесирање на сигнали кои се користени во различни полиња на истражување како физика, биологија, медицина, комуникации и климатски истражувања [32, 40, 52, 77, 94].

Голема предност на Баесовите методи е можноста за инферирање на динамики на системи кои не се изолирани, туку се подложни на надворешни влијанија од средината во која се наоѓаат или од други процеси со кои се слабо спрегнати [6, 8, 96]. Еден пример на надворешните влијанија кој е од големо значење е присуството на шум во динамичкиот систем. Покрај можноста за инферирање на динамики во присуство на шум, методот од интерес овозможува проучувања и кога самите динамики се временски променливи. На тој начин ДБИ овозможува следење на временската еволуција на параметрите на моделот со кој се опишува временски променливиот динамички систем во присуство на шум.

Методот може да се применува на различни видови динамички системи. Потекнувајќи од потребата за проучување на физиолошките системи во човековиот организам, од интерес за оваа теза е истражувањето на спрегнати осцилаторни динамички системи. Токму овие системи, како кардиореспираторниот или нервниот систем, се пример на спрегнати динамички системи со временски променливи параметри во присуство на шум. Од интерес е проучувањето на функциите на спрега кои го опишуваат заемнодејството на различните потсистеми во динамичкиот систем кој се проучува.

4.1 Декомпозиција на фазната динамика

Во методот на ДБИ [30, 31, 46] влезни величини се мултиваријантни временски серии на фази кои ја опишуваат динамиката на осцилаторите кои заемнодејствуваат. Моментните фази се проценуваат од измерените сигнали со користење на соодветни методи за детекција на фазите, на пример со користење на Хилбертов трансформ, со користење на аголна променлива или со вејвлет синхросквиз трансформ.

Декомпозицијата на фазната динамика која е вградена во методот се остварува со користење на периодични базни функции претставени во форма на конечни Фуриеови серии. Утврдувањето на распределбата на параметрите на декомпозицијата е овозможено од самата пробабилистичката природа на Баесовата теорија. Истовремено, Баесовата веројатност на која почива методот е и самата временски зависна, како временски зависен информациски процес, поради користењето на претходната веројатност при инференцијата на тековната распределба на параметрите. Добиените временски променливи параметри, кои се излезни величини од инференцијата, понатаму се користат за проценка, квантификување и опишување на осцилаторните заемнодејства. Преку реконструкција на динамиката со употреба на базните функции, се овозможува раздвојување на динамичките промени од промените причинети од шумот.

Проценката на спрегите е директно поврзана со параметризацијата на базните функции. За осцилаторите кои се доволно слични да можат да бидат опишани со исти базни функции, споредбата на параметрите е доволна за проценка кој од двата осцилатори го побудува другиот. Проучувањето на заемнодејствувачките базни функции како група, може да даде сознанија за функционалните врски кои ги опишуваат заемнодејствата на осцилаторите.

4.1.1 Базни функции

Кога два повеќедимензионални самоодржувачки осцилатори заемнодејствуваат слабо, нивното движење може да се опише преку нивната фазна динамика [4]:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + f_i(\phi_i) + q_i(\phi_i, \phi_j) + \xi_i(t), \quad (4.1)$$

каде што величините ω_i се аголните фреквенции на осцилаторите, функциите $f_i(\phi_i)$ ја опишуваат сопствената динамика на осцилаторите, функциите $q_i(\phi_i, \phi_j)$ се функциите на спрега кои го опишуваат заемнодејството меѓу осцилаторите, додека шумот $\xi_i(t)$ е дводимензионален просторно корелиран шум, за кој вообичаено се претпоставува дека е бел Гаусов шум опишан со функцијата $\langle \xi_i(t) \xi_j(\tau) \rangle = \delta(t - \tau) E_{ij}$, каде што во симетричната матрица E_{ij} е вклучена информацијата за корелацијата помеѓу шумовите на различните осцилатори. Сите останати координати можат да се претстават како функции од фазата $\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(\phi_i)$ [3]. За релевантно осознавање на заемнодејствата помеѓу осцилаторите е неопходна прецизна инференција на функциите f_i, q_i , како и на елементите на матрицата на шумот E_{ij} . Периодичната природа на системите сугерира користење на периодични базни функции, поради што за декомпозиција се користат Фуриеови членови:

$$\begin{aligned} f_i(\phi_i) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{i,2k} \sin(k\phi_i) + \tilde{c}_{i,2k+1} \cos(k\phi_i), \\ q_i(\phi_i, \phi_j) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{i,r,s} e^{i2\pi r \phi_i} e^{i2\pi s \phi_j}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Неколку други техники исто така користат Фуриеови серии за инферирање на фазниот модел [47, 49, 51, 86, 87, 97], но во нив не се инферираат ниту параметри кои го карактеризираат шумот, ниту неговата динамика.

Најчесто динамиката ќе биде доволно добро опишана со конечен број K Фуриеови членови, па (4.1) може да се запише како:

$$\dot{\phi}_i = \sum_{k=-K}^K c_k^i \Phi_{i,k}(\phi_1, \phi_2) + \xi_i(t), \quad (4.3)$$

каде што индексот $i=1,2$, членовите $\Phi_{1,0} = \Phi_{2,0} = 1$, $c_0^i = \omega_i$, а останатите членови $\Phi_{i,k}$ и c_k^i се K -те најзначајни Фуриеови членови.

Треба да се нагласи дека изборот на Фурие серии за опишување на фазната динамика е општа декомпозиција која не зависи од конкретниот модел. Тоа произлегува од фактот дека влезните величини монотонно растат со времето, независно од димензионалноста и комплексноста на сигналите. Фазата $\phi_i(t)$ содржи доволно информации за инферирање на временски променливата фазна динамика. Доколку се прави декомпозиција на осцилаторни заемнодејства во тридимензионален простор, тогаш динамиката мора да се инферира со користење на специфични, најчесто полиномни, базни функции зависни од моделот.

4.1.2 Баесова инференција

Во современи услови, под Баесова веројатност се подразбира една интерпретација на концептот за веројатност, во која веројатноста се интерпретира како разумно очекување кое претставува одредена состојба на сознанија. Со цел евалуирање на веројатноста за една хипотеза, Баесовата веројатност користи претходна веројатност која потоа е ажурирана со вклучување на новите информации од значење. Научните хипотези вообичаено се изразуваат преку веројатносната распределба на набљудуваните податоци χ , која зависи од параметрите на моделот $\mathcal{M}$. Во рамките на Баесовата статистика, постојните сознанија за параметрите на моделот се содржани во веројатносната густина на распределба на параметрите која се означува како претходна густина на распределба $p_{prior}(\mathcal{M})$. Кога ќе се осознаат нови информации χ , сознанието кое тие го содржат во врска со параметрите на моделот се изразува преку функција на сличност $l(\chi|\mathcal{M})$, која е пропорционална на условната распределба на набљудувањата, при дадени параметри на моделот. Ваквата информација се спојува со претходната распределба $p_{prior}(\mathcal{M})$ и се добива ажурирана веројатносна распределба карактеризирана со постериорна густина на распределба. Баесовата теорема математички го дефинира начинот на ова унапредување и тврди дека постериорната густина е пропорционална со претходната, помножена со функцијата на сличност на целиот параметарски простор:

$$p_{\chi}(\mathcal{M}|\chi) = \frac{l(\chi|\mathcal{M})p_{prior}(\mathcal{M})}{\int l(\chi|\mathcal{M})p_{prior}(\mathcal{M})d\mathcal{M}}. \quad (4.4)$$

Во овој контекст, главната задача во Баесовата анализа би се свела на изнаоѓање и евалуација на функцијата на сличност, при претпоставка дека претходната густина, како и потребните податоци се познати.

Иако вака поставената Баесова теорема на прв поглед изгледа едноставно, таа овозможува инверзно третирање на разгледуваниот проблем – поаѓајќи од добиените резултати од мерењата, да се дојде до самата природа на заемнодејствата. Тоа овозможува нејзина широка практична примена во најразлични дисциплини, вклучувајќи ги физиката на елементарни честички, астрофизиката, космологијата, геофизиката, комуникациите, фармакологијата, медицината и биологијата итн.

За да ја прикажеме општата рамка на инференцијата за стохастични динамички процеси, ќе разгледаме M димензионална временска серија на податоци од набљудувањето $y = \{y_n \equiv y(t_n)\}$ дефинирана со временски чекор $t_n = nh$. Се претпоставува дека постои поттикнувачка динамика опишана со L димензионален стохастички процес $\phi(t)$, каде што $L \geq M$. Основната динамика може да се опише со множество од L димензионални стохастички диференцијални равенки од обликот:

$$\dot{\phi}(t) = f(\phi|c) + z(t), \quad (4.5)$$

каде што $\mathbf{c}$ е множество на параметри кои се вградени во динамичкото поле $\mathbf{f}$, додека функцијата $\mathbf{z}(t)$ се смета дека е L димензионален процесен Гаусов шум. Се претпоставува дека шумот на мерењето е занемарливо мал и дека податоците кои се отчитуваат при мерењето претставуваат една динамичка променлива. Основното прашање кое се поставува пред инференцијата е: знаејќи ги измерените податоци χ , какво сознание може да се добие за функциите $\mathbf{f}$, нивните параметри $\mathbf{c}$ и за процесниот шум $\mathbf{z}$?

Како што погоре укажавме, во Баесовата рамка, вака поставениот проблем се сведува на одредување на функцијата на сличност и на оптимизирање на постериорната распределба во однос на множеството $\mathcal{M} = \{\mathbf{c}, \mathbf{z}\}$.

За да се добие израз за функцијата на сличност, се прави дополнителна претпоставка дека семплирањето $\{t_n = nh\}$ е доволно густо во однос на динамиката, т.е интервалот h е доволно мал за валидност на апроксимацијата за Ојлеровата средна точка. Во таков случај равенката 4.5 може да се апроксимира со:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + hf(\phi_n^*|\mathbf{c}) + z_n, \quad (4.6)$$

каде што величината ϕ_n^* е средна вредност на две последователни состојби на динамичката променлива ϕ :

$$\phi_n^* = \frac{\phi_{n+1} + \phi_n}{2}. \quad (4.7)$$

Во равенката 4.6, членот z_n е стохастичкиот интеграл:

$$z_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{z}(t)dt = \sqrt{h}\mathbf{H}\xi_n, \quad (4.8)$$

каде што величината $\mathbf{H}$ е матрица која задоволува $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{E}$, а величината ξ_n е нормална променлива со унитарна варијанса $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \mathbb{I}\delta_{nm}$ и нулта средна вредност $\langle \xi_n \rangle = 0$.

Главната идеја е да се пресмета веројатноста за $\phi_{n+1} - \phi_n - hf(\phi_n^*|\mathbf{c})$ за секоја вредност на n , како функција од веројатноста за реализација на целиот процес $\{z_n\}$.

Веројатноста за одредена реализација z_n е:

$$P(z_n) = \frac{dz_n}{\sqrt{(2\pi)^L h^L \det(\mathbf{E})}} \exp\left(-\frac{z_n^T \mathbf{E}^{-1} z_n}{2h}\right). \quad (4.9)$$

Поради претпоставката за бел шум и статистичката независност на реализацијата z_n од реализацијата z_m при $m \neq n$, вкупната веројатност на процесот $\{z_n\}$ е производ од веројатностите за секоја поединечна реализација z_n :

$$P(\{z_n\}) = \prod_{i=0}^{N-1} P(z_i) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dz_n}{\sqrt{(2\pi)^L h^L \det(E)}} \exp\left(-\frac{z_i^T E^{-1} z_i}{2h}\right). \quad (4.10)$$

Веројатноста на сличност $l(\chi|\mathcal{M})$ долж временската скала може да се изрази како густина на веројатност за одредена реализација на динамичкиот систем:

$$l(\chi|\mathcal{M}) = P(\{\phi_n\}) = \rho_0(\phi_0) \prod_{i=0}^N \rho(\phi_i). \quad (4.11)$$

Изразот за веројатноста на сличност $l(\chi|\mathcal{M})$ е разложен на ваков начин поради потребата за изразување на производот $\prod_{i=0}^N \rho(\phi_i)$ директно, во смисла на множеството реализации $\{z_n\}$.

Со замена на променливата од z_n во функцијата $\phi_{n+1}(z_n)$ и со воведување на јакобијанот $[\mathbf{J}]_{ij} = \delta_{ij} - \frac{h}{2} \frac{\partial f(\phi_n^*|\mathbf{c})_i}{\partial [\phi_n^*]_j}$, се добива веројатноста за реализација на целиот процес $\{\phi_n\}$:

$$P(\{\phi_{n+1}\}) = \frac{d\phi_{n+1} \det(\mathbf{J})}{\sqrt{(2\pi h)^L \det(\mathbf{E})}} \exp\left\{-\frac{h}{2} \left(\dot{\phi}_n - \mathbf{f}(\phi_n^*|\mathbf{c})\right)^T \mathbf{E}^{-1} \left(\dot{\phi}_n - \mathbf{f}(\phi_n^*|\mathbf{c})\right)\right\}, \quad (4.12)$$

каде што изводот $\dot{\phi}_n = \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{h}$. Бидејќи сите елементи на Јакобиевата матрица, освен долж главната дијагонала, се нули, за детерминантата на јакобијанот може да се направи натамошна апроксимација. Изведувањето на функцијата на густината на веројатност води до следниот израз за функцијата на сличност:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{N} \ln(l(\chi|\mathcal{M})) &= +\ln(\det(\mathbf{E})) + \\ &+ \frac{h}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\left(-\frac{h}{2} \frac{\partial \mathbf{f}(\phi_n^*|\mathbf{c})}{\partial \phi_n^*} \right) + \left(\left(\dot{\phi}_n - \mathbf{f}(\phi_n^*|\mathbf{c}) \right)^T \mathbf{E}^{-1} \left(\dot{\phi}_n - \mathbf{f}(\phi_n^*|\mathbf{c}) \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Следната задача е да се максимизира постериорната веројатност, т.е. да се внесе равенката (4.13) во Баесовата теорема, со цел да се најде оптималната веројатност за множеството параметри $\mathcal{M}$ за дадени вредности χ .

Претходната густина на распределба $P_{prior}(\mathcal{M})$ е мултиваријантна нормална распределба во однос на параметрите $\mathbf{c}$. Ако векторот на параметрите $\mathbf{c}$ е M -димензионален вектор, неговата претходна веројатност е дадена со:

$$P_{prior}(\mathbf{c}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Sigma_{pr})}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_{pr})^T \Sigma_{pr}^{-1} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_{pr})\right), \quad (4.14)$$

каде што векторот $\mathbf{c}_{pr}$ е вектор на *a-priori* коефициенти, додека матрицата Σ_{pr} е неговата коваријансна матрица. Равенките 4.13 и 4.14 ги даваат потребните веројатности од кои се користење на Баесовата теорема може да се проценат постериорните веројатности.

Се воведува следната параметризација на зависноста $\mathbf{f}$ од векторот на параметри $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{f}(\phi|\mathbf{c}) = \Phi(\phi)\mathbf{c}, \quad (4.15)$$

каде што функцијата $\Phi(\phi)$ е $L \times M$ матрица на Фуриеови базни функции како што се опишани во главата 4.1.1. Со ваквата линеарна параметризација на зависноста $\mathbf{f}$ се добива квадратна логаритамска функција на сличност во однос на векторот на параметри $\mathbf{c}$. На таков начин, користењето на мултиваријантна нормална распределба за претходната веројатност води до мултиваријантна нормална распределба на постериорната веројатност. Ова е од особен интерес, бидејќи Гаусовата постериорна распределба, која е опишана само со средната вредност и коваријансата, е погодна за компјутерски секвенцијални пресметки, во кои може да се користи како нова претходна распределба во следниот блок на инференција.

Конечно, постериорната густина на распределба е одредена од стационарната точка на логаритамската функција на сличност, која може рекурзивно да се пресметува со следните равенки:

$$\mathbf{E} = \frac{h}{n} \sum_{n=0}^{N-1} [\dot{\phi}_n - \Phi_n \mathbf{c}] [\dot{\phi}_n - \Phi_n \mathbf{c}]^T, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{w}_\chi(\mathbf{E}) = \Sigma_{pr}^{-1} \mathbf{c}_{pr} + h \sum_{n=0}^{N-1} \left[\Phi_n^T \mathbf{E}^{-1} \dot{\phi}_n - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(\phi_n^*)}{\partial \phi_n^*} \right], \quad (4.17)$$

$$\Xi_\chi(\mathbf{E}) = \Sigma_{pr}^{-1} + h \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n^T \mathbf{E}^{-1} \Phi_n, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{c} = \Xi_\chi^{-1}(\mathbf{E}) \mathbf{w}_\chi(\mathbf{E}), \quad (4.19)$$

каде што величината Ξ е инверзната матрица на коваријансната матрица $\Xi = \Sigma^{-1}$ која се нарекува концентрациона матрица или матрица на прецизност.

Ваквото следство одговара на оптимален алгоритам за компјутерски пресметки: почнувајќи од иницијални вредности за коваријансната матрица Σ_{pr}^{-1} и параметрите $\mathbf{c}_{pr}$, со помош на равенката 4.16 може да се пресмета матрицата на шумот $\mathbf{E}$, а потоа користејќи ја неа и равенките 4.17-4.19 да се евалуира векторот на параметри $\mathbf{c}$. Истата процедура рекурзивно ќе се повторува, сè до конвергенција на шумот $\mathbf{E}$ и параметрите $\mathbf{c}$ до стабилност. Во отсуство на претходни сознанија за системот, за почетни вредности на

инференцијата може да се земат иницијални вредности за коваријансната матрица $\Sigma_{pr}^{-1} = 0$, а за параметрите $\mathbf{c}_{pr} = 0$.

Методот на ДБИ може да се резимира на следниот начин. Со линеарната параметризација на векторското поле $\mathbf{f}(\phi|\mathbf{c}) = \Phi(\phi)\mathbf{c}$, се добива логаритамска функција на сличност која е квадратна функција во однос на параметрите. Мултиваријантната нормална распределба за претходната веројатност $P_{prior}(\mathbf{c})$ доведува до мултиваријантна нормална распределба за постериорната веројатност. Затоа, при реализација на податоците χ со двете влезни величини $\mathbf{c}_{pr}$ и Σ_{pr} , и соодветно средните вредности и коваријансите на претходната распределба, множеството на параметри кои најдобро го опишуваат системот е опишано само со две величини $\mathbf{c}_{post}$ и Σ_{post} , т.е. со средните вредности и коваријансите на постериорната густина на распределба $P_{post}(\mathbf{c})$. Постериорната густина на распределба е дадена со

$$P_{post}(\{\mathbf{c}\}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2}(\Sigma_{post})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{c}_{post})^T \Sigma_{post}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{c}_{post})\right). \quad (4.20)$$

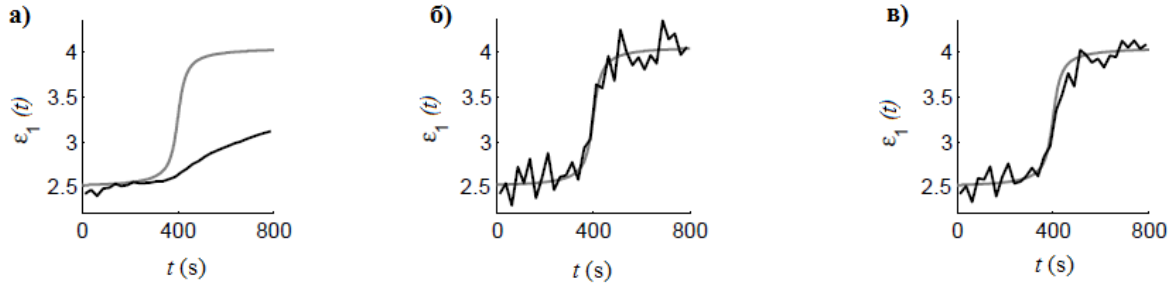
За следниот секвенцијален блок на податоци χ генерирани од истата динамика, постериорната информација од првиот блок податоци ќе се искористи како претходна за вториот блок податоци. Понатаму ваквиот процес на пренесување на информациите продолжува на ист начин.

4.1.3 Пренесување на временски променлива информација

Со $\mathcal{N}_\chi(E)$ ќе ја означиме мултиваријантната веројатност дадена со равенката 4.20 за одредена временска серија $\chi = \{\phi_n = \phi(t_n)\}$. Таа експлицитно ја дефинира густината на веројатност за секој параметар на динамичкиот систем. Кога податоците во секвенцата се резултат на серија мерења кои претставуваат повеќе последователни блокови информации, равенките 4.16-4.19 се применуваат за секој блок. Евалуацијата на распределбата во тековниот блок зависи од евалуацијата од претходниот блок, односно тековните влезни параметри зависат од излезните параметри од претходниот блок. На таков начин секоја стационарна точка од следството на инферираните вредности за параметрите на моделот зависи од вредностите на инферираните параметри во претходните блокови.

Кај класичната Баесова инференција, кога е познато дека системот не се менува со времето, претходната густина на веројатност за некој блок (влезната информација) се зема дека е еднаква на постериорната густина на веројатност добиена во претходниот блок (излезната информација): $\Sigma_{prior}^{n+1} = \Sigma_{post}^n$. Во таков случај, потполното пренесување на коваријансната матрица овозможува задоволително издвојување на шумот и со текот на времето, како се зголемува бројот на мерења кои се вклучуваат во инференцијата, така ќе

се намалуваат неодреденостите на инферираните параметри. Но, доколку постои временска променливост, ваквото пренесување ќе биде ограничувачки фактор за инференцијата и нема да ги инферира временските промени на параметрите. Ова е прикажано на сликата 4.1 а), која прикажува случај на потполно пренесување на коваријансната матрица при инференција на моделот кој опишува два спрегнати Поанкареови осцилатори во присуство на шум, каде што фреквенцијата на едниот од осцилаторите е временски променлива (преземено од [46]).



Слика 4.1 – Инференција на временски променлив параметар со голем градиент од спрегнати осцилатори во присуство на шум опишани со равенката 6.1. Сивата линија ја покажува вистинската промена на параметарот, додека црната ја покажува инферираната вредност: а) потполно пренесување на коваријансната матрица, б) без пренесување на коваријансната матрица, в) пренесување на коваријансната матрица според методот на ДБИ.

Од друга страна, доколку кај динамички систем во присуство на шум има временска промена на параметрите и доколку се смета дека процесите помеѓу било кои два последователни блока се независни (процесите се сметаат за Марковијанови), тогаш меѓу последователните блокови податоци ќе нема пренесување и секоја инференција ќе започнува со израмнета распределба $\Sigma_{prior}^{n+1} = 0$. Во таков случај инференцијата подобро ќе ја опише временската променливост на параметрите, но влијанието на шумот ќе биде поголемо, како и неодреденоста на инференцијата. Ова е прикажано на слика 4.1 б).

Методот на ДБИ ја дефинира претходната густина на веројатност да биде мултинормална, преку дополнителна квадратна симетрична позитивна матрица. Методот претпоставува дека веројатноста за секој параметар од моделот може да се опише преку позната дифузиона матрица Σ_{diff} , па густината на веројатност за секој параметар е конволуција на две нормални мултиваријантни распределби Σ_{post} и Σ_{diff} :

$$\Sigma_{prior}^{n+1} = \Sigma_{post}^n + \Sigma_{diff}^n. \quad (4.21)$$

Конкретната форма на распределбата Σ_{diff} опишува кој дел од динамичкото поле кое ги дефинира осцилаторите се менува и колкава е големината на таа промена. Во општ случај распределбата $(\Sigma_{diff})_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, каде што величината σ_i е стандардната

девијација на дифузијата на параметарот c_i , за временски прозорец t_w , додека ρ_{ij} е корелацијата помеѓу промените на параметрите c_i и c_j :

$$\Sigma_{diff,(i,j)}^n = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\ \vdots & \rho_{ii}\sigma_i\sigma_i & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Се разгледува посебен случај на распределбата Σ_{diff} , при кој се смета дека не постои промена во корелацијата помеѓу параметрите ($\rho_{ij} = \delta_{ij}$) и дека секоја стандардна девијација σ_i од главната дијагонала на матрицата е познат дел од соодветниот параметар, т.е. $\sigma_i = p_w c_i$, каде што индексот дуплове во p_w укажува дека параметарот p се однесува на прозорец со должина t_w . Ваквиот пример е сè уште значително општ, затоа што подразбира дека сите параметри од дијагоналата на матрицата Σ_{post}^n може да имаат временски променлива природа, а таков е случајот кај експерименталните системи кај кои временската варијабилност на параметрите не е однапред позната. На слика 4.1 в) е илустрирано како ваквото пренесување на информацијата ја унапредува инференцијата преку коректно инферирање на временската променливост и истовремено намалување на неодреденоста со текот на времето, како што се зголемува бројот на новодобиени податоци.

Доколку во некој експеримент е однапред познато дека само еден или неколку параметри се променливи, тогаш формата на матрицата Σ_{diff} може да специфицира на начин кој ќе овозможи следење на временската променливост само на параметрите од интерес. Тоа би се постигнало со анулирање на оние коефициенти долж главната дијагонала на дифузионата матрица, за кои се знае дека не се временски променливи.

4.2 Опис на заемнодејствата

Една од главните цели на ДБИ е инферирање и опишување на заемнодејствата помеѓу осцилаторите во динамичка средина која делува на нив преку надворешни детерминистички и стохастички влијанија. Независно дали станува збор за група од неколку осцилатори или за големи популации, нивните заемнодејства ги карактеризираат внатрешните врски помеѓу осцилаторите и претставуваат основа од која се објаснуваат голем број состојби и појави во природата.

Природата на заемнодејствата зависи главно од физичките карактеристики на осцилаторните системи, нивната функционалност и нивното однесување при надворешни пертурбации. Главната идеја на примената на ДБИ е да се искористат инферираните параметри од веројатноста $\mathcal{N}_x(c, \Sigma)$ за опишување на карактеристиките на заемнодејствата. Бидејќи, според равенката 4.1, динамиките се одделно реконструирани, од сите инферирани параметри може да се искористат оние кои се поврзани со

заемнодејствата помеѓу осцилаторите. Заемнодејствата може да се окарактеризираат во смисла на јачина на спрега, доминантни насоки на спрегите или преку инферирање на функциите на спрега. Истовремено, може да се следи и временската промена на карактеристиките на заемнодејствата, што е особено значајно при испитување на премините на системот од една состојба во друга.

4.2.1 Јачина и насоченост на спрегата

Јачината на заемнодејството или амплитудата на спрегата го квантификуваат протокот на информации помеѓу осцилаторите и се веќе користени во повеќе истражувања за одредување на причинско-последични врски [29, 98] или за реконструкција на структурата на мрежи [51, 97]. Предложени се неколку начини за квантификување на спрегите, како што се методот на заеднички теориски информации [34, 68], фазна динамичка декомпозиција [45, 87], вејвлет биспектар [70] и пертурбациони техники [49, 87, 99]. Но, овие техники не инферираат параметри кои го карактеризираат шумот или неговата динамика, а некои од нив не ја инферираат соодветно ни временската променливост на внатрешните параметри.

Амплитудата на спрегата го квантификува вкупното влијание помеѓу осцилаторите во некој правец, на пример, колку динамиката на првиот осцилатор влијае на динамиката на вториот ($1 \rightarrow 2$). Доколку влијанието е само во еден правец, говориме за еднонасочна спрега, а доколку влијанието е во двата правци, станува збор за двонасочна спрега. Во методот на ДБИ амплитудите на спрегата се проценуваат како нормализирани мерки од параметрите кои заемнодејствуваат, а кои се инферирани од базните функции на спрегата $q_i(\phi_i, \phi_j)$. Квантификувањето се прави преку Евклидова норма:

$$\begin{aligned}\epsilon_{21} &= \|q_1(\phi_1, \phi_2)\| \equiv \sqrt{c_1^2 + c_3^2 + \dots}, \\ \epsilon_{12} &= \|q_2(\phi_1, \phi_2)\| \equiv \sqrt{c_2^2 + c_4^2 + \dots},\end{aligned}\tag{4.23}$$

каде што како пример во прикажаната имплементација непарните инферирани параметри се придружени на базните функции $q_1(\phi_1, \phi_2)$, кои ја опишуваат спрегата со која вториот осцилатор влијае на првиот ($\epsilon_{21}: 2 \rightarrow 1$), додека парните ја опишуваат спрегата со која првиот осцилатор влијае на вториот ($\epsilon_{12}: 1 \rightarrow 2$).

Насоката на спрегата често пати дава корисни информации за заемнодејствата и се дефинира како нормализација околу доминантната амплитуда на спрегата:

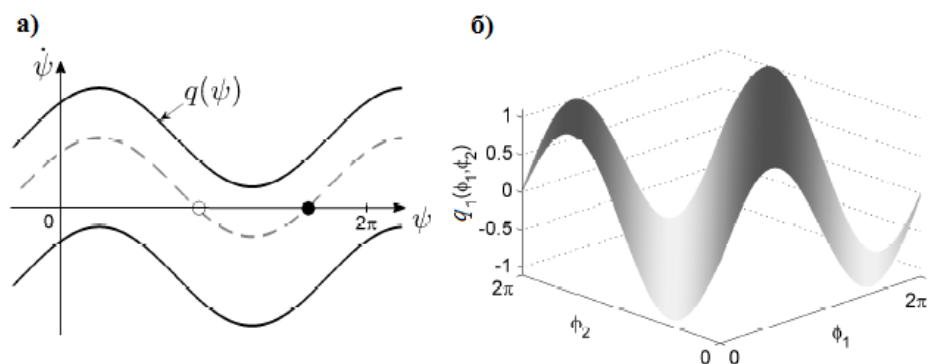
$$D = \frac{\epsilon_{12} - \epsilon_{21}}{\epsilon_{12} + \epsilon_{21}}.\tag{4.24}$$

Доколку вредноста на $D \in (0, 1]$, првиот осцилатор го побудува вториот, а доколку вредноста на $D \in [-1, 0)$, вториот го побудува првиот. Самата вредност на јачината на спрегата ϵ_i или на насоката D претставува мерка за меѓусебниот однос на осцилаторите. Притоа, вредност различна од нула може да се инферира дури и кога нема заемнодејство на осцилаторите. За надминување на последниот недостаток може да се користи сурогат тестирање [100, 101] и отфрлување на вредностите кои се помали од прифатливиот сурогат праг, кој може да е утврден како средната вредност плус две стандардни девијации од доволно голем број реализации на мерките.

4.2.2 Реконструкција на функциите на спрега

Покрај јачината на спрегата и нејзината насоченост, методот на ДБИ овозможува инференција и на функцијата на спрега, која ги карактеризира функционалните заемнодејства на осцилаторите. Нејзината карактеристична форма е резултат на природата на осцилаторите и на реакцијата на нивната динамика под дејство на надворешни пертурбации. Инференцијата на фазниот модел е основа на повеќе техники за инференција на функциите на спрега [47, 86, 87, 97], но, тие техники или не ја инферираат динамиката на шумот и параметрите кои неа ја карактеризираат, или не ја инферираат временски променливата динамика на параметрите на моделот.

Функциите на спрега добиваат на популарност при проучувањето на феномените на синхронизација. Во нив, функцијата на спрега е дефинирана како закон преку кој заемнодејствата доведуваат до синхронизација, односно до премин кон стабилна рамнотежа. Ова е опишано на слика 4.2 за случај на едноставни фазни осцилатори, како оние опишани од Курамото [3], каде што функцијата на спрега има синусна форма.



Слика 4.2 – Шематски приказ на функција на спрега како функција од фазната разлика на осцилаторите: а) полната линија е за случај во отсуство на синхронизација, а испрекинатата е при синхронизација. Празниот круг одговара на стабилна, а полниот на нестабилна рамнотежа; б) зависноста на функцијата на спрега од двете променливи.

На сликата е даден шематски приказ на функција на спрега како функција од фазната разлика на осцилаторите $\psi = \phi_2 - \phi_1$. Полната линија на слика 4.2 а) прикажува ситуација кога осцилаторите не се синхронизирани и не постојат стабилни решенија за фазната разлика. За одредени параметри на системот (разлики во фреквенциите и амплитудите на спрегите) функцијата на спрега ја сече оската на рамнотежа $\dot{\psi} = 0$ и се појавуваат две решенија, едно стабилно, означено со празен круг на сликата, и второ нестабилно, означено со полн круг на сликата. За овие две решенија осцилаторите се синхронизираат. За да се утврди синхронизацијата, доволно е да се анализира функцијата на спрега само во однос на фазната разлика. Во општ случај, може да се анализира функцијата на спрега во однос на двете фази, што е прикажано на слика 4.2 б). Винфри [73] користи функција дефинирана од двете фази, а не само од фазната разлика, а Даидо и Крафорд [102, 103] користат поопшта форма каде што функцијата на спрега е разложена во Фуриеова серија.

Функцијата на спрега треба да е 2π периодична. Во рамките на методот на динамичката Баесова инференција, функцијата на спрега се развива во конечна сума Фуриеови членови. Функцијата која го опишува заемнодејството помеѓу двата осцилатори се развива преку непарните параметри $q_1(\phi_1, \phi_2) \in \{c_1, c_3, \dots\}$, додека соодветните базни функции $\Phi_n[q_1(\phi_1, \phi_2)] \in \{\sin(\phi_1, \phi_2), \cos(\phi_1, \phi_2)\}$ се до ред n на развојот. На аналоген начин се развива и обратната функција на спрега $q_2(\phi_1, \phi_2) \in \{c_2, c_4, \dots\}$.

Еден од новитетите на методот на ДБИ, во споредба со претходните методи е можноста за инферирање на функциите на спрега во различни моменти од времето, што е овозможено од пренесувањето на временската променливост преку соодветната коваријанса матрица. На ваков начин можно е следење на временската еволуција и на самите функции на спрега, а со тоа и на промените на заемнодејствата помеѓу составните делови на осцилаторниот систем со текот на времето.

4.3 Технички аспекти на динамичката Баесова инференција

За успешно користење на методот на ДБИ, неопходно е да се дискутираат техничките аспекти, неговите можности, како и ограничувањата на неговата употреба. Разбирањето на техничките аспекти е од големо значење за негово соодветно користење, пред сè бидејќи е комбинација на повеќе идеи чие заедничко користење бара соодветна подготовка. Ќе разгледаме како различен број на базни функции влијае врз инференцијата, како се однесува инференцијата при различни големини на шумот, каква временска резолуција на временски променливите параметри може да се следи и како да се изведуваат заклучоци за величини кои се комбинација од инферираните параметри.

4.3.1 Број на базни функции

Проблемот на утврдување на бројот на базни функции се состои во оптимизирање на прецизноста на методот во однос на потребното компјутерско време за пресметките. За динамиката да биде попрецизно инферирана, потребно е да се користат поголем број базни функции. Ова е понагласено кога треба да се инферираат параметри чии временски промени силно се разликуваат од синусни промени, на пример остра линеарна промена на некој параметар. Во таков случај, неопходно е инференцијата да вклучува Фуриесов развој од повисок ред. Но, големиот број базни функции ќе го зголеми компјутерското време кое на алгоритмот му е потребно за пресметки и истовремено функциите кои не се дел од вистинската динамика која се инферира ќе вклучат некои компоненти од шумот во самата инференција. Во рамките на методот базните функции се претставени како мултиваријантни Гаусови распределби во форма на матрици. Поради тоа, поголем број на базни функции значително го зголемуваат бројот на параметри кои треба да се пресметуваат и на тој начин итеративните пресметки експоненцијално ја намалуваат брзината на процесирање, особено евалуациите на инверзните матрици. Поради тоа методот на ДБИ, особено при поголем број базни функции, не овозможува апликации во реално време.

Станковски [7] ја демонстрира прецизноста на инференцијата на временски променливи параметри преку нумерички симулиран сигнал. Симулацијата е спроведена на модел од два спрегнати Поанкареови осцилатори во присуство на бел шум:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - 1\right)x_1 - \omega_1(t)y_1 + \varepsilon_{12}(t)(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \dot{y}_1 &= -\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - 1\right)y_1 + \omega_1(t)x_1 + \varepsilon_{12}(t)(y_2 - y_1) + \xi_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - 1\right)x_2 - \omega_2(t)y_2 + \varepsilon_{21}(t)(x_1 - x_2) + \xi_2(t), \\ \dot{y}_2 &= -\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - 1\right)y_2 + \omega_2(t)x_2 + \varepsilon_{21}(t)(y_1 - y_2) + \xi_2(t), \end{aligned} \tag{4.25}$$

каде што фреквенциите $\omega_i(t)$ и амплитудите на спрегите $\varepsilon_{ij}(t)$ во некои случаи се временски променливи. Функциите на спрега се линеарни разлики од соодветните променливи $(x_j - x_i, y_j - y_i)$. Амплитудата на спрегата од првиот на вториот осцилатор е земено да се менува периодично со времето, по закон $\varepsilon_{12}(t) = \varepsilon_{12} + \tilde{A} \sin(\tilde{\omega}t)$.

Евалуацијата на амплитудата на спрегата е направена со користење на Евклидовите норми дадени во равенка 4.23. Резултатите од инференцијата на амплитудата на спрегата $\varepsilon_{12}(t)$ покажуваат дека во близина на локалните максимуми на синусната зависност,

постои извесно отстапување на инференцијата од синусната зависност, но тоа отстапување се намалува со зголемување на бројот на базни функции. Резултатите покажуваат дека користењето на втор ред Фуриеови базни функции ($K=2$ во равенката 4.3) дава оптимални резултати во однос на брзината на процесирањето. Поради тоа во понатамошниот тек на ова истражување користевме втор ред Фуриеови базни функции, односно 50 базни функции за истражуваните системи од два спрегнати осцилатори.

4.3.2 Влијание на интензитетот на шумот

Една од главните предности на методот на ДБИ е можноста за раздвојување на внатрешната динамика на системот од шумот. Се поставува прашање колку квалитетна може да биде инференцијата при различни јачини на шумот. Интуитивно е јасно дека одговорот ќе зависи од начинот на пренесување на информацијата: при целосно пренесување на информацијата и при временски непроменливи параметри, резултатите ќе бидат најдобри. Но, целта на методот е инференција на временски променлива динамика, па затоа, во тезата на Станковски [7] е разгледуван системот опишан со равенките 4.25 при различни интензитети на шумот. Притоа за фреквенциите ω_i и за амплитудите на спрегите ε_{ij} се користени константни, временски непроменливи вредности и е истражувано колку инферираните параметри се разликуваат од нивните вистински вредности, при различни интензитети на шумот. Резултатите потврдуваат дека со зголемување на шумот инференцијата на параметрите станува сè полоша. Утврдено е и дека девијациите на амплитудите на спрегите се поголеми отколку девијациите на фреквенциите. Објаснувањето е дека амплитудата на спрегата е одредена како Евклидова норма од повеќе инферирани параметри, па ефектите на шумот кои се присутни кај секој од параметрите на некој начин се сумираат, доведувајќи до поголемо влијание на шумот врз инферираната амплитуда на спрегата.

Влијанието на шумот врз инференцијата е истражувано и во рамките на оваа теза, при одредувањето на вредноста на параметарот на пренесување, за што ќе биде дискутирано понатаму во текстот.

4.3.3 Временска резолуција

Главната цел на методот на ДБИ е инферирање на временски променливи динамики. Затоа треба да се разгледа колку брзи и колку бавни динамики може да се инферираат и колкава прецизност се постигнува притоа. Овој проблем е поврзан со големината на прозорецот односно со бројот на податоци вклучени во еден блок.

Станковски [7] ја има истражувано оваа проблематика преку користење на системот опишан со равенките 4.25, при што користел временски променлива фреквенција $\omega_1(t)$ и временски променлива амплитуда на спрегата $\varepsilon_{12}(t)$ кои се менувани по синусен

закон. Во истражувањето се користени 4 различни временски прозорци со различни должини 0,5 s, 5 s, 50 s и 100 s. Утврдено е дека за најмалиот прозорец, параметрите се ретки и спорадични и инференцијата не е најсоодветна, поради големите флуктуации на инферираните параметри. Утврдено е дека инференцијата на амплитудите на спрегите се подобрува со текот на времето, но не и на фреквенциите. За најголемиот прозорец, временската варијабилност е побрза од временскиот прозорец при инференцијата и постои ограничување на формата на инферираната варијабилност. Заклучокот на Станковски [7] е дека треба да се избираат временски прозорци помеѓу средните две вредности.

Во оваа теза се направени понатамошни истражувања кои овозможуваат поегзактен начин на утврдување на временскиот прозорец и на параметарот на пренесување со цел постигнување на оптимална инференција на параметрите, функциите на спрега и шумот.

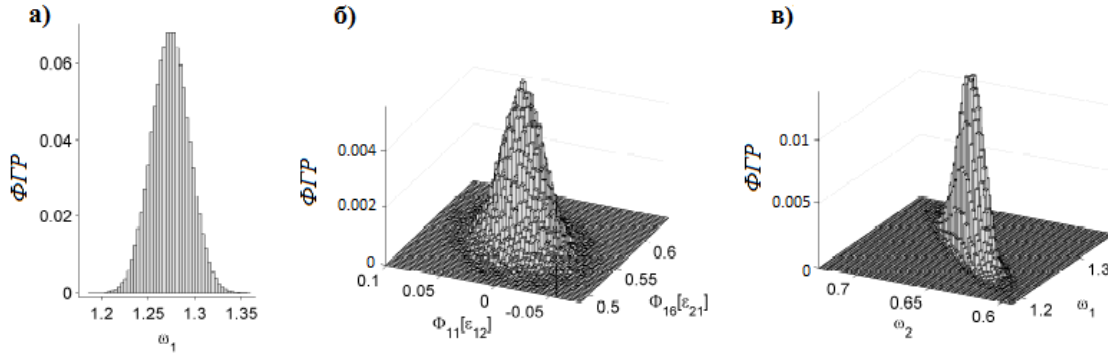
4.3.4 Веројатносна распределба на инферираните параметри

Конечниот резултат на инференцијата е даден со множеството $\mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma)$. Секој инфериран параметар е претставен со Гаусова распределба и е дел од мултиваријантна Гаусова распределба за целиот параметарски простор даден со средниот вектор $\bar{c}$ и коваријансната матрица Σ . Доколку треба да се инферираат величини кои се комбинација на инферираните параметри, треба да се одреди веројатноста за конкретната величина од мултиваријантната Гаусова распределба $\mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma)$.

За илустрација да претпоставиме дека е дадена бинарната карактеристика на некоја величина $m(c) = \{1, 0\}$. Постериорната веројатност на величината ќе биде:

$$p_m \equiv p_\chi(m = 1) = \int m(c) \mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma) dc. \quad (4.26)$$

Најчесто ваквиот интеграл нема да има аналитичко решение и се решава со нумерички методи. Во параметарскиот простор, користејќи Монте Карло пристап, може да се генерираат многу реализации m_k , каде што k го означува параметарскиот вектор кој се тестира. На слика 4.3, преземена од [7], се прикажани неколку примери на распределби на примероците од моделот опишан со равенките 4.25.



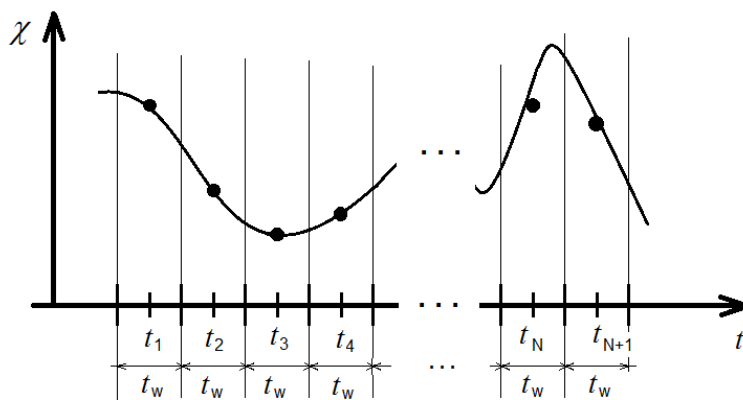
Слика 4.3 – Функции на густина на распределба на веројатноста за инферирани параметри од моделот опишан со равенките 4.25 во отсуство на временска променливост: а) Гаусов облик на распределбата на инферираната фреквенција ω_1 , б) биваријантна дистрибуција на два параметра на спрега, в) биваријантна дистрибуција на два параметри на фреквенција.

На сликата 4.3 а) е дадена функцијата на густина на распределба на веројатноста за една вредност на фреквенцијата ω_1 по семплирање на распределбата $\mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma)$, додека на сликите 4.3 б) и в) се прикажани распределбите на корелациите за два инферирани параметри. Прикажаните биваријантни распределби на сликите 4.3 б) и в) се приказ на наједноставните случаи од мултиваријантната нормална распределба $\mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma)$ кој може да има многу повеќе мултиваријантни димензии.

За да се најде веројатноста p_m со произволна прецизност, потребно е да се генерираат K параметри c_k , каде што $k=1, 2, \dots, K$ земени од распределбата $\mathcal{N}_\chi(c|\bar{c}, \Sigma)$, бидејќи веројатноста $p_m = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_k^K m(c_k)$. Но, со зголемување на бројот на Фуриеови компоненти ваквата повеќедимензионална интеграција станува неефикасна. Од друга страна, ако постериорната веројатност p_χ има остар врв околу средната вредност $\bar{c}$, тогаш веројатноста p_m нема да се разликува од вредноста на величината $m(\bar{c})$, па во таков случај доволна ќе биде и самата евалуација на величината $m(\bar{c})$.

5. ВОСПОСТАВУВАЊЕ НА ПРОТОКОЛ ЗА АДАПТИВНА ДИНАМИЧКА БАЕСОВА ИНФЕРЕНЦИЈА

Еден од основните проблеми при користење на различните методи кои се базираат на секвенцијална анализа на податоци е како да се одреди должината на временскиот прозорец на еден блок податоци. Исклучок не се ни методите базирани на Баесовата теорија, во кои влегува и ДБИ како метод за инферирање на временски променлива динамика во присуство на шум. При анализа на временски серии кои потекнуваат од еден динамички систем, неопходно е следење на временската променливост на динамиката, односно промената на параметрите и функциите со кои таа се опишува во текот на времето. За таа цел потребно е најпрво да се одреди временскиот интервал кој ќе соодветствува на една точка од временската еволуција на системот. По одредувањето на овој временски интервал, наречен временски прозорец и означен како t_w , се пристапува кон анализа на податоците преку нивно разделување во последователни блокови податоци, секој со времетраење од еден временски прозорец. За секој блок податоци се инферираат вредностите на параметрите и функциите и добиените вредности се смета дека одговараат на временска точка на средина од тој временски интервал. На таков начин, времетраењето на временскиот интервал, т.е. должината на временскиот прозорец, ја одредува временската резолуција на параметрите и функциите кои се следат. Ова е прикажано на слика 5.1.



Слика 5.1 – Шематски приказ на секвенцијална инференција со временски прозорец t_w .

Должината на временскиот прозорец вообичаено е компромис помеѓу две конфликтни барања. Првото е временскиот прозорец да биде доволно голем за да има доволен број податоци за методот да даде точни резултати, а второто е да биде што е можно помал, за да обезбеди што е можно подобра временска резолуција на промените на параметрите и функциите од интерес. Од таа причина изборот на големината на

временскиот прозорец е проблематичен и затоа често пати тој се избира како слободен параметар врз основа на искуството и интуицијата на истражувачот.

Предмет на истражување на оваа докторска дисертација е проучување на кардиореспираторните заемнодејства во човековиот организам анализирани преку функциите на спрега. За реконструкција на функциите на спрега ќе го користиме методот на ДБИ [30, 31, 46], кој се заснова на секвенцијална анализа на временските серии од фазите на осцилаторите добиени од мерења проследени со процесирање на сигналите. Временските серии во методот се сметаат за временски секвенци од блокови примероци. Секој блок ги вклучува примероците од одреден временски интервал, т.е. е одреден од временскиот прозорец t_w . За секој блок се спроведува Баесовата инференција со која се добиваат вредностите на параметрите на моделот и спрегите на осцилаторите. Како што е опишано во претходната глава, излезните вредности од претходниот блок се користат како влезни вредности за инференцијата во тековниот блок.

Методот овозможува динамичка инференција на временски променлива динамика во присуство на шум, што значи дека треба да ја следи временската еволуција на множеството параметри c и во исто време да овозможи разделување на динамичките ефекти од шумот. За да овозможи такво раздвојување, во секвенцата на пренесување на методот, влезната коваријансна матрица за следниот блок Σ_{prior}^{n+1} не се зема дека е еднаква на излезната коваријансна матрица од тековниот блок Σ_{post}^n , туку е модифицирана со дифузионата матрица Σ_{diff}^n . Дифузионата матрица, како што е опишано во претходната глава, е одредена од нормалната дифузија на секој од параметрите. На тој начин, влезната коваријансна матрица за следниот блок ќе биде конволуција на двете тековни нормални распределби $\Sigma_{prior}^{n+1} = \Sigma_{post}^n + \Sigma_{diff}^n$. Коваријансната матрица Σ_{diff}^n опишува кој дел од динамичкото поле одредено од осцилаторите се менува и колкави се тие промени. Елементите на оваа матрица се дадени со величините $\Sigma_{diff,(i,j)} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$, каде што величината σ_i е стандардната девијација на дифузијата на параметарот c_i , по време t_w од претходниот до следниот блок примероци, додека величината $\rho_{i,j}$ ја дава корелацијата помеѓу промените на параметрите c_i и c_j . Разгледуваме специјален случај, кога нема корелација меѓу параметрите, т.е. $\rho_{i,j} = 0, i \neq j$ и секоја стандардна девијација σ_i е познат дел од соодветниот параметар c_i , односно $\sigma_i = p_w c_i$, каде што параметарот p_w е константен параметар, кој се нарекува параметар на пренесување на коваријансната матрица. Индексот „w“ во параметарот, нагласува дека параметарот на пренесување е одреден за временски прозорец t_w . На ваков начин, параметарот на пренесување одредува колкава варијабилност треба да бара методот и да инферира. Бидејќи е дел од коваријансната матрица Σ_{diff} , тој го изразува нашето уверување кој дел од динамиката се променил и колкава е големината на таа промена. Тоа е повторно компромис помеѓу точното инферирање на временски променливите параметри и невклучување на премногу пертурбации од динамичкиот шум во инференцијата. Во претходните апликации на

методот на ДБИ и овој параметар на пренесување, слично како и временскиот прозорец е произволно избиран.

Досега, при користење на овој метод временскиот прозорец и параметарот на пренесување се избирани произволно. Со цел подобрување на инференцијата спроведена со овој метод преку оптимизирање на инференцијата на параметрите и шумот, во оваа докторска дисертација ќе го прошириме методот преку воспоставување на протокол за адаптивно одредување на овие два параметри.

Како индикатор за квалитетот на спроведената инференција ја користиме коваријансната матрица Σ . По дефиниција, тоа е матрица чиј елемент на (i, j) позицијата е коваријансата помеѓу i -тиот и j -тиот елемент на мултидимензионален случаен вектор. Елементите долж главната дијагонала на коваријансната матрица се варијансите на променливите, т.е. коваријансите на секој елемент со себе. Бидејќи квадратот на варијансата е стандардната девијација, преку минимизирање на сумата од квадратите на елементите на коваријансната матрица, ќе ја минимизираме и стандардната девијација на инферираните параметри на моделот. Поради тоа го користиме збирот од квадратите на сите елементи на коваријансната матрица $Q_{\Sigma} = \text{Sum}_{i,j}(\Sigma_{i,j}^2)$ како индикатор за отстапувањата на инферираните параметри од нивните вистински вредности. Симулациите кои беа спроведени покажаа дека елементите долж главната дијагонала доминираат во вредноста на коваријансната матрица, па не прави разлика дали како индикатор го користиме збирот од квадратите на елементите долж главната дијагонала, или збирот од квадратите на сите елементи на матрицата. Збирот од квадратите на сите елементи на матрицата го нарекуваме квадратурна коваријансна матрица.

За изнаоѓање на методологија за одредување на временскиот прозорец и параметарот на пренесување користевме нумерички симулации на системи од спрегнати осцилатори во присуство на шум. Овие системи од спрегнати осцилатори се претставени со системи од диференцијални равенки чии параметри ние ги задаваме. На ваков начин параметрите на моделот добиен со ДБИ ни се однапред познати.

Со ваквите диференцијални равенки генерираме нумерички сигнали за фазите на системот. Вака генерираните фази понатаму ги користиме како влезни податоци за ДБИ. Како излезни податоци од ДБИ, за секој блок на инференција, ги добиваме инферираните параметри на моделот како и инферираните шумови. Бидејќи разгледуваме динамички системи, тие всушност претставуваат инферирани параметри и шумови во даден момент од времето. За секој блок на инференција, како што е детално образложено во претходната глава, во равенките 4.16-4.19, како излезен податок од ДБИ ја добиваме и концентрационата матрица (равенка 4.18). Инверзната матрица на концентрационата матрица е всушност коваријансната матрица. Збирот од квадратите на елементите на коваријансната матрица, односно квадратурната коваријансна матрица, означена како Q_{Σ} ,

каде што $Q_{\Sigma} = \text{Sum}_{i,j}(\Sigma_{i,j}^2)$, претставува мерка за квалитетот на спроведената инференцијата.

Бидејќи при нумеричките симулации ни се познати вистинските вредности на параметрите на моделот на спрегнати осцилатори, покрај коваријансната матрица Q_{Σ} , за утврдување на квалитетот на инференцијата ја евалуираме и разликата помеѓу инферираните параметри c_i и шумови E_i и нивните вистински вредности $c_{i,true}$ и $E_{i,true}$, соодветно: $\Delta c_i = c_i - c_{i,true}$ и $\Delta E_i = E_i - E_{i,true}$. Ја истражуваме зависноста на величините Q_{Σ} , Δc_i и ΔE_i од големината на временскиот прозорец t_w , за различни вредности на параметарот на пренесување p_w .

Во истражувањето најпрво разгледуваме систем од два спрегнати фазни осцилатори во присуство на шум:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \omega_1(t) + a_1 \sin(\varphi_1) + a_3(t) \sin(\varphi_2) + \sqrt{E_{11}} \xi_1(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 + a_2 \sin(\varphi_1) + a_4 \sin(\varphi_2) + \sqrt{E_{22}} \xi_2(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Тука, величините ω_1 и ω_2 се параметри за аголната фреквенција на соодветните осцилатори, величините a_1 и a_4 се параметрите на сопствената динамика, а величините a_2 и a_3 се параметрите на спрега за директното влијание од другиот осцилатор. Два од параметрите се менуваат периодично со времето, фреквенцијата ω_1 и параметарот на спрега a_3 . Останатите четири имаат константни вредности во текот на времето. Користените шумови се некорелирани Гаусови бели шумови.

Изборот на фазни осцилатори е погоден за инференција поради потребата за реконструкција на фазната динамика, која со ваков избор е директно достапна, со што се елиминира потребата за користење на дополнителни методи за фазна реконструкција и неопределеностите кои тие ги внесуваат. На ваков начин фазниот модел е однапред познат и тригонометриските функции на десната страна од равенката (5.1) се всушност базните функции кои се користат за инференција на шесте параметри од равенката (ω_1 , ω_2 , a_1 , a_2 , a_3 и a_4).

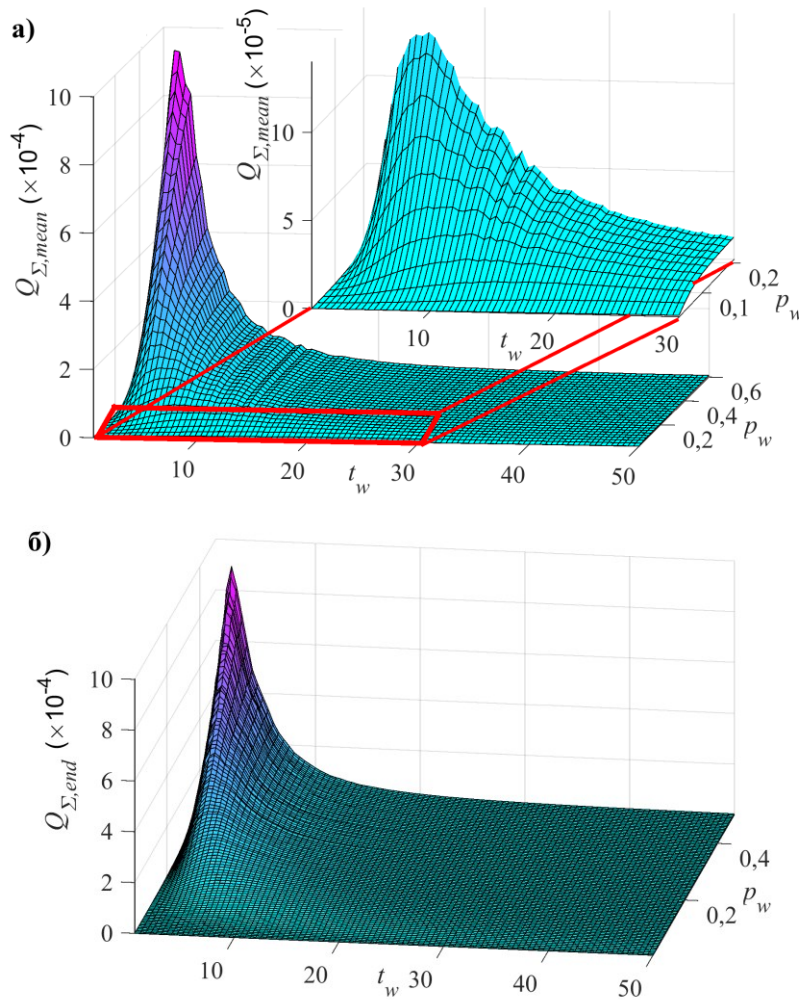
За системот од два спрегнати фазни осцилатори (5.1) беа симулирани повеќе временски серии, секоја со времетраење од 2000 s, со параметар на семплирање со вредност $h=0,01$, кој одговара на семплирање на секои 10 ms. Овие временски серии се влезни податоци за ДБИ. Во истражувањето, параметрите a_1 , a_2 и a_4 се константни и имаат вредности $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0$ и $a_4 = 0,6$. Фреквенцијата ω_2 се менуваше во интервалот на вредности од 0,785 до 31,4. Временски променливите параметри се дадени со:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_{1,const} - 0,5 \sin 2\pi f_1 t, \\ a_3 &= a_{3,const} - 0,3 \sin(2\pi f_3 t + \pi/2),\end{aligned}\tag{5.2}$$

каде што параметарот $a_{3,const}$ има вредност 0,8 или 1,3, параметарот $\omega_{1,const}$ се менуваше во интервал од 0,785 до 62,8, а фреквенциите на осцилаторите f_1 и f_2 се менуваа во интервалот од 0,001 до 0,02. За јачините на шумот (E_{11} , E_{22}) беа користени вредности во интервалот (0,01, 10). За ваквите вредности ја иследувавме зависноста на величините Q_Σ , c_i и ΔE_i од големината на временскиот прозорец t_w и од параметарот на пренесување p_w .

5.1 Одредување на временскиот прозорец

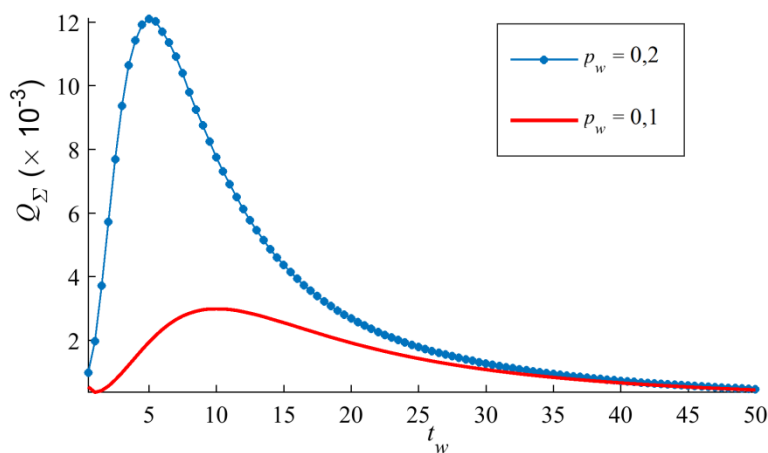
Типичниот изглед на зависноста на коваријансната матрица Q_Σ од временскиот прозорец t_w и параметарот на пренесување p_w е дадена на сл.5.2.



Слика 5.2 - Типичен изглед на зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец и параметарот на пренесување за спрегнати фазни осцилатори опишани со равенката (5.1). а) Средна вредност на коваријансната матрица за сите блокови на инференцијата, со исклучок на првите два блока. б) Коваријансната матрица за инференцијата од последниот блок.

На сликата 5.2 а) е прикажана пресметаната средна вредност на коваријансната матрица Q_Σ за сите блокови на инференцијата, со исклучок на првите два блока. Првите два блока се исклучени од матрицата $Q_{\Sigma,mean}$ бидејќи влезните вредности за параметрите во првиот блок се избираат за нули. На тој начин првите два блока сметаме дека се користат за методот да има можност за достигнување на некои пореални почетни вредности, процес наречен иницијализација. На сликата 5.2 б) е прикажана зависноста $Q_\Sigma(t_w, p_w)$ само за последниот блок на инференцијата. Како што се гледа од сликите формата на зависноста $Q_\Sigma(t_w, p_w)$ не зависи од тоа дали ќе се разгледува само еден блок или средната вредност од сите блокови (со исклучок на првите два). Во понатамошниот текст, кога не е поинаку нагласено, ознаката Q_Σ секогаш ќе се однесува на средната вредност од квадратурните коваријансни матрици за сите блокови со исклучок на првите два. При одредување на тридимензионалните графици како оние прикажани на слика 5.2 сите инферирани вредности се усреднети на помеѓу 5 и 50 траектории во фазниот простор. Од слика 5.2 се гледа дека зависноста на коваријансната матрица Q_Σ од временскиот прозорец t_w покажува максимум кој зависи од вредноста на параметарот на пренесување p_w .

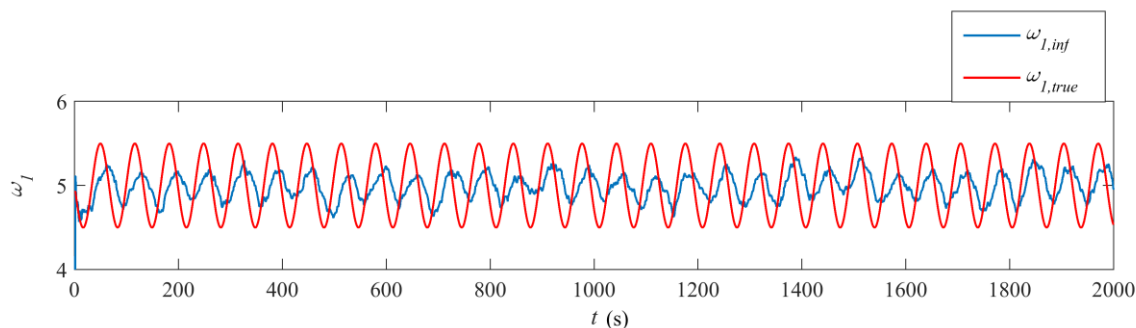
Преку анализа на голем број нумерички симулации утврдивме дека за даден параметар на пренесување p_w , максимумот на кривата која ја опишува зависноста $Q_\Sigma = Q_\Sigma(t_w)$ се добива за временски прозорец со вредност $t_{w,max} = \frac{1}{p_w}$. Како што покажува врската, со намалување на вредноста на параметарот p_w , максимумот се поместува кон поголеми вредности на параметарот t_w што е прикажано на сликата 5.3.



Слика 5.3 – Зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец за две различни вредности на параметарот на пренесување.

Спроведените анализи покажуваат дека за сите комбинации на параметрите t_w и p_w кои ја поставуваат инференцијата на лево од максимумот на соодветната крива $Q_\Sigma = Q_\Sigma(t_w)$, инференцијата не ги следи временските промени на параметрите. Ова е

прикажано на сл.5.4. Ваквите комбинации на временскиот прозорец t_w и параметарот на пренесување p_w не овозможуваат инференцијата да ја достигне амплитудата на промени на временски променливиот параметар. Ваквото поведение го нарекуваме режим на одложена инференција.



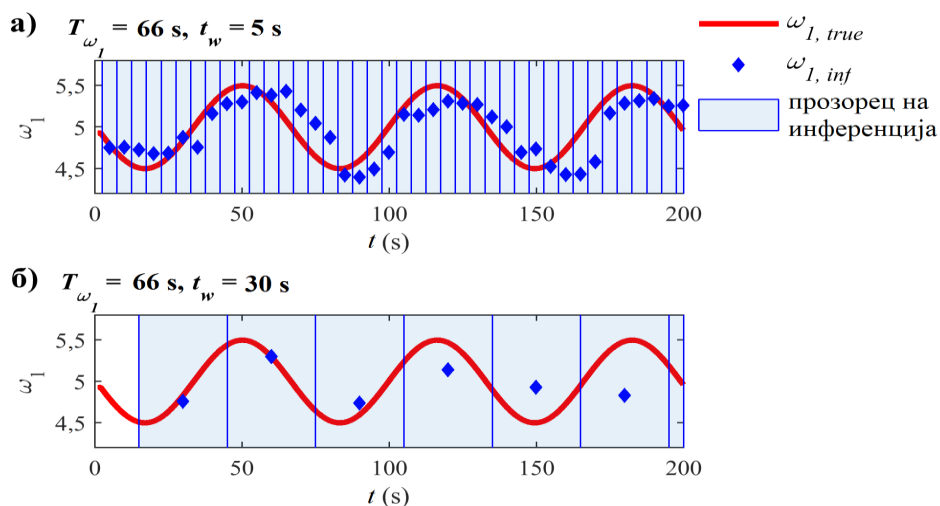
Слика 5.4 – Режим на одложена инференција - комбинациите на параметрите t_w и p_w кои ја позиционираат инференцијата лево од максимумот на кривата $Q_\Sigma = Q_\Sigma(t_w)$ не овозможуваат инференцијата да ја достигне амплитудата на промени на временски променливиот параметар. На сликата е даден приказ на временските промени на параметарот ω_1 . Инферираната вредност $\omega_{1,inf}$ е означена со сина боја, а вистинската вредност на параметарот $\omega_{1,true}$ со црвена боја.

За вредности на временскиот прозорец $t_w > t_{w,max}$, коваријансната матрица Q_Σ монотонно опаѓа (прикажано на сликите 5.2 и 5.3) и истовремено отстапувањето на инферираните параметри од нивните вистински вредности исто така опаѓа. Ова укажува на тоа дека за поквалитетна инференција би требало да избереме што е можно поголем временски прозорец.

Меѓутоа, истовремено, преголеми вредности за временскиот прозорец ќе оневозможат соодветна инференција, бидејќи во таков случај би имало премалку блокови за соодветно опишување на временските промени. Во текот на времето би имало премалку инферирани параметри за соодветно опишување на временските промени на параметрите на моделот. Ова е илустрирано на сликата 5.5. На неа е прикажан параметарот ω_1 кој се менува периодично со период $T=66$ s (црвените линии на сликите). На сликата 5.5 а) е прикажана инференција со временски прозорец со $t_w = 5$ s, која дава 13 инферирани вредности (означени со сини точки) за еден период. На сликата 5.5 б) е прикажана инференција со временски прозорец со $t_w = 30$ s, која дава само 2 инферирани вредности (означени со сини точки) за еден период. Очигледно е дека преголемо времетраење на блокот на инференција оневозможува соодветно следење на временските промени на параметрите.

Врз основа на овие резултати заклучуваме дека временскиот прозорец треба да има што повисока вредност, со цел вредноста на коваријансната матрица Q_Σ да биде што е

можно помала, но истовремено доволно ниска вредност за да може соодветно да ја претстави динамиката на параметарот кој се менува со најголема фреквенција.



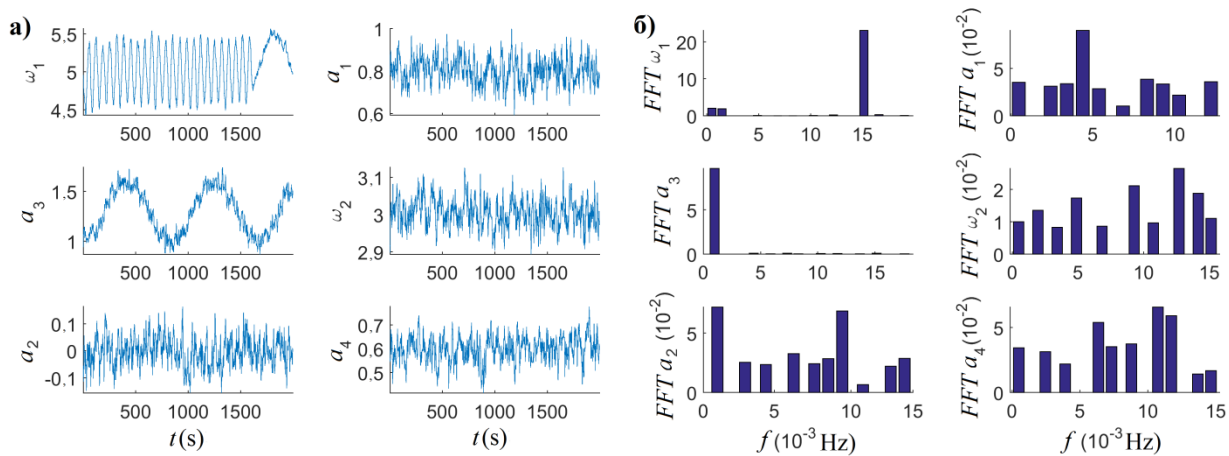
Слика 5.5 – Приказ на параметарот ω_1 при негови периодични промени со период $T=66$ s; а) инференција со временски прозорец со $t_w = 5$ s, б) инференција со временски прозорец со $t_w = 30$ s. Преголемо времетраење на блокот на инференција оневозможува соодветно следење на временските промени на параметрите.

Поради тоа, оптималната вредност на временскиот прозорец ќе ја поврземе со периодот на осцилациите на параметарот на моделот кој се менува со најголема фреквенција. Со таа цел, во анализите најпрво се прави иницијална проценка на временската промена на параметрите, со цел приближно одредување на најголемата фреквенција на промена на било кој од параметрите на моделот. Оваа иницијална проценка се прави со користење на што е можно помала вредност за временскиот прозорец и иницијална вредност за параметарот на пренесување од $p_w = 0,2$.

При користење на самиот софтвер за ДБИ, напишан во Матлаб, за многу мали вредности на временскиот прозорец, концентрационата матрица пресметана во првиот блок од инференцијата може да биде премногу голема, па програмот ќе јави грешка која оневозможува понатамошна инференција. Поради тоа, иницијалната инференција ја правиме со временски прозорец $t_w = 1$ s. Доколку е концентрационата матрица толку голема да ја оневозможи работата на софтверот, го зголемуваме временскиот прозорец за 1 s и правиме нов обид за иницијална инференција. На ваков начин се одредува минималната вредност на временскиот прозорец за која концентрационата матрица е доволно мала да може да се спроведе целосната инференција. Оваа вредност на временскиот прозорец ќе биде иницијалната вредност со која се спроведува иницијалната ДБИ. Мал временски прозорец се користи за да се овозможи инферираните параметри што подобро да ги опишат брзите промени на вистинските параметри на моделот, за сметка на вклучување на поголем шум во инференцијата.

Од истражувањата за параметарот на пренесување кои се презентирани понатаму во текстот се покажува дека вредност за параметарот на пренесување од $p_w = 0,2$ е доволно добра за иницијалната инференција.

Со спроведување на иницијалната инференција ги добиваме параметрите на моделот и како тие се менуваат во текот на времето. Од интерес е да го најдеме оној параметар чии промени се најбрзи. Претпоставувајќи осцилаторна динамика на параметрите, ја користиме функцијата FFT во Матлаб со цел да го утврдиме периодот на најбрзо променливиот параметар. За таа цел е креиран код во Матлаб со кој за секој од параметрите се спроведува брза Фурие трансформација и потоа, со помош на графикон со столпчиња, графички се претставуваат најзастапените десет фреквенции на осцилаторни промени за секој параметар. Со анализа на графициите на временските промени на параметрите и на графиконите на фреквенциите ја утврдуваме најголемата фреквенција на промена на параметрите. Оваа фреквенција ќе ја означиме како f_{max} , а соодветниот период како $T_{min} = \frac{1}{f_{max}}$. На слика 5.6 а) се прикажани временските промени на шесте инферираните параметри од системот даден со равенките (5.1), додека на слика 5.6 б) се прикажани соодветните графикони со десетте најзастапени фреквенции во промените на секој од параметрите. Од сликата јасно се гледа дека параметарот ω_1 се менува најбрзо и најголемата фреквенција на негова промена има вредност $f_{max} = 0,015 \text{ Hz}$, односно најмалиот период на осцилаторни промени има вредност $T_{min} = \frac{1}{f_{max}} = 66,7 \text{ s}$.



Слика 5.6 – а) Иницијално инферираните параметри од системот прикажан со равенките (5.1), б) брзи Фурие трансформации од иницијално инферираните параметри, соодветно.

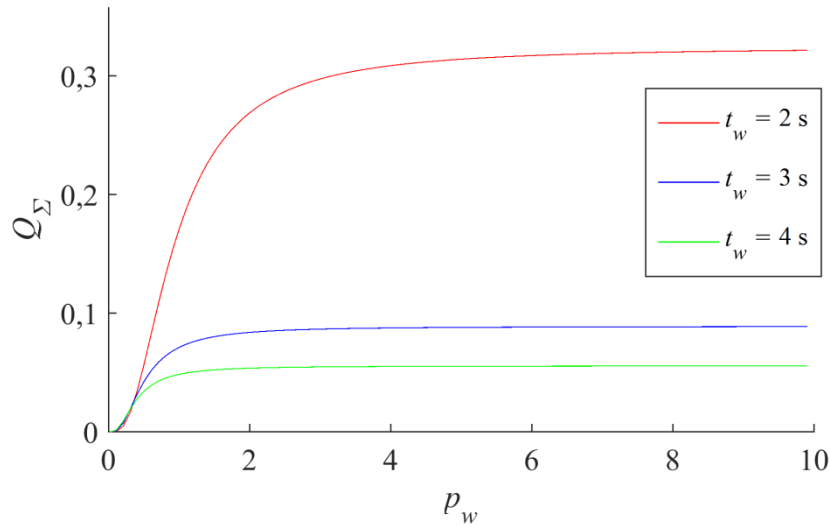
Од спроведените анализи на временската променливост заклучивме дека минималниот број на блокови, потребен за соодветно опишување на најбрзо променливиот параметар има вредност 8, што значи дека времетраењето на временскиот прозорец оптимално треба да се избере како:

$$t_{w,opt} = \frac{T_{min}}{8} = \frac{1}{8f_{max}}. \quad (5.3)$$

Ваквата вредност за временскиот прозорец ќе овозможи резолуција од 8 точки за опишување на најбрзо осцилирачкиот параметар на моделот. За сите останати параметри ќе има повеќе точки за опишување на нивните осцилации, што значи дека променливата динамика ќе биде соодветно опишана со инферираните параметри.

5.2 Одредување на параметарот на пренесување

Во врска со параметарот на пренесување p_w , со спроведување на нумеричките анализи за системот равенки 5.1, утврдено е монотono растење на инферираната коваријанска матрица Q_Σ со зголемување на параметарот p_w . Кривата на зависност на коваријансната матрица Q_Σ од параметарот p_w покажува заситување за големи вредности за параметарот p_w , кое што е прикажано на сликата 5.7.



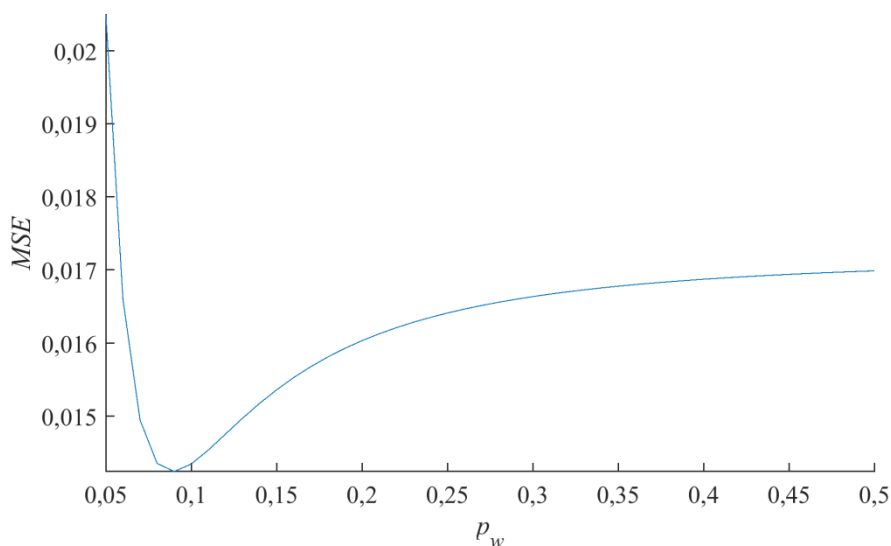
Слика 5.7 – Зависност на коваријансната матрица од параметарот на пренесување за различни вредности на временскиот прозорец.

Затоа, со цел најдобра можна инференција, треба да се користи што е можно помал параметар на пренесување. Меѓутоа, како што прикажавме погоре, за мали параметри на пренесување, помали од вредноста $p_{w,min} = 1/t_{w,max}$ инференцијата влегува во режим на одложена инференција и не ги следи временските промени на параметрите (слика 5.4).

За одредување на оптималната вредност на параметарот на пренесување, беше одредена разликата меѓу инферираните параметри и нивната вистинска вредност. Оваа разлика беше евалуирана на два различни начина.

Во првиот начин, за даден параметар p_w , ги следевме граfiците како прикажаниот на слика 5.4 за различни вредности на временскиот прозорец t_w и со евалуирање на разликата помеѓу инферираните параметри и нивните вистински вредности утврдувавме минимална вредност за временскиот прозорец t_w за која инферираните параметри почнуваат да ги следат промените на вистинските вредности. Тоа ќе биде вредноста на параметарот t_w кога разликата $\Delta cc = cc_{true} - cc_{inf}$ ќе престане да покажува периодични промени со времето.

Вториот начин беше со одредување на средната квадратна грешка ($MSE = \text{„Mean Square Error“}$) помеѓу временската серија на инферираниот параметар и временската серија на неговата вистинска вредност (при што првите два блока од инференцијата беа исклучени). Средната квадратна грешка ја одредувавме за различни вредности на параметарот на пренесување и од нив конструиравме график $MSE = f(p_w)$ за различни вредности на временскиот прозорец $t_w = t_{w,opt}$. Ваквите граfiци покажуваат минимум од кој се одредува вредноста за параметарот p_w за која совпаѓањето на инферираните и вистинските вредности на параметрите е оптимално. Еден ваков график е прикажан на сликата 5.8.

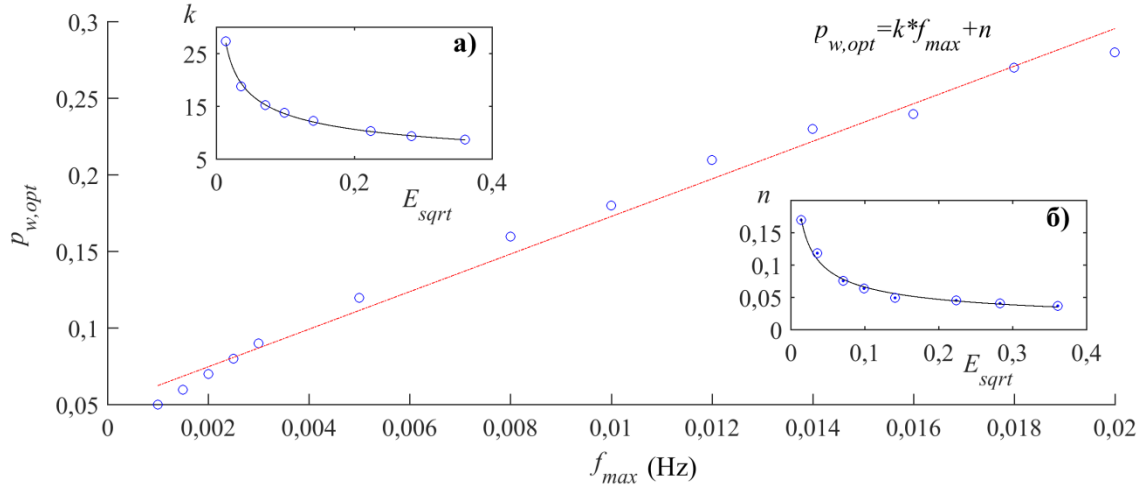


Слика 5.8 – Типичен пример за зависноста на средната квадратна грешка од параметарот на пренесување при оптимална вредност на временскиот прозорец.

Ваквите анализи беа спроведени за различните фреквенции на промена на параметрите и за различните вредности на јачината на шумот, во интервалите наведени погоре во текстот. Временските прозорци користени во овие симулации беа оптималните вредности $t_{w,opt}$ одредени со равенката (5.3).

Од анализите беше утврдено дека оптималните вредности за параметарот на пренесување зависат и од максималната фреквенција на промена на параметрите (а со тоа

и од оптималниот временски прозорец) и од јачините на шумот. Оптималната вредност на параметарот на пренесување е приближно линеарно зависна од фреквенцијата на најбрзо променливиот параметар f_{max} , што е прикажано на слика 5.9.



Слика 5.9 – Типичен пример за зависноста на оптималниот параметар на пренесување од максималната фреквенција на промени на параметрите. Зависноста на коефициентот на правец од квадратурата на шумот, а), како и зависноста на отсечокот од квадратурата на шумот, б), можат приближно да се опишат со инверзна степенска функција.

Коефициентот на правец и отсечокот на оваа линеарна зависност зависат од квадратурата на шумот. Под квадратура на шумот подразбираме Евклидова норма од двете компоненти долж главната дијагонала на квадратната матрица која го опишува шумот: $E_{sqrt} = \sqrt{E_{11}^2 + E_{22}^2}$. Зависноста на коефициентот на правец од квадратурата на шумот, како и зависноста на отсечокот од квадратурата на шумот можат приближно да се опишат со инверзна степенска функција, што е прикажано на слика 5.9 а) и б) соодветно.

Од досега прикажаните резултати може да се заклучи дека оптималниот параметар на пренесување, $p_{w,opt}$ може да се поврзе со оптималниот временски прозорец, $t_{w,opt}$. Како правило, оптималниот параметар на пренесување треба да е поголем од реципрочната вредност на оптималниот временски прозорец $p_{w,opt} > 1/t_{w,opt}$. Во интервалот на фреквенции и шумови кој беше предмет на анализа, а кој соодветствува на кардиореспираторните интеракции, параметарот на пренесување во ДБИ може да се избере на следниот начин. За бавна динамика, кога оптималниот временски прозорец е поголем од 40 s, за вредност на параметарот на пренесување може да се користи $p_{w,opt} = 0,1$. За оптимални временски прозорци во интервалот $t_{w,opt} \in [10 \text{ s}, 40 \text{ s}]$, за оптималниот параметар на пренесување може да се користи вредноста $p_{w,opt} = 0,2$. При брза динамика, кога оптималниот временски прозорец е помал од 10 s, оптималниот параметар на пренесување треба да се одреди како $p_{w,opt} = 2/t_{w,opt}$.

Неопходно е да се нагласи дека овие вредности може да се користат при испитување на кардиореспираторни интеракции само кога шумот не е многу мал. Со намалување на вредноста на квадратурата на шумот, за вредности на $E_{sqr} < 0,03$ треба да се користат сè поголеми вредности за оптималниот параметар на пренесување. Така на пример, нашите резултати за фазната динамика покажуваат дека за вредности на $E_{sqr} = 0,01$, сите горенаведени вредности за параметарот $p_{w,opt}$ треба да се помножат со фактор 2, додека за вредности на $E_{sqr} = 0,005$, сите горенаведени вредности за параметарот $p_{w,opt}$ треба да се помножат со фактор 3 итн.

5.3 Протокол за адаптивна динамичка Баесова инференција

Врз основа на резултатите добиени во глава 5.1 и 5.2 го предлагаме следниот алгоритам за одредување на оптималниот временски прозорец $t_{w,opt}$ и оптималниот параметар на пренесување $p_{w,opt}$. Ваквиот алгоритам ќе претставува основа за протоколот за адаптивната динамичка Баесова инференција (аДБИ).

Користејќи мала произволна вредност за временскиот прозорец и почетна вредност за параметарот на пренесување од $p_w = 0,2$ се спроведува иницијална инференција. Произволната вредност за временскиот прозорец може да биде најмалата вредност при која методот дава излез. За помали вредности за временскиот прозорец t_w , компјутерското извршување на програмата за ДБИ се прекинува поради грешка во операцијата за инвертирање на концентрационата матрица. На овој начин се добиваат иницијалните инферирани параметри на моделот c_{ij} и јачини на шумот E_{ij} . Ваквата инференција ќе ја има најдобрата информација за динамиката на параметрите во смисол на временска варијабилност, но инферираниот шум ќе биде прилично голем и нереален. Потоа се спроведува брза Фурие трансформација на иницијално инферираните параметри c_{ij} . Преку користење на динамиката на секој од параметрите и соодветните брзи Фурие трансформи, се одредува најголемата фреквенција на промена на параметрите. Оваа фреквенција ја означуваме со f_{max} , додека соодветниот период е $T_{min} = \frac{1}{f_{max}}$. Со претпоставка дека минималниот број блокови потребен за соодветно опишување на динамиката на најбрзо променливиот параметар е 8, оптималниот временски прозорец ќе биде одреден како $t_{w,opt} = \frac{T_{min}}{8} = \frac{1}{8f_{max}}$. Ваквиот временски прозорец ќе обезбеди резолуција од 8 точки за опишување на најбрзо осцилирачкиот параметар. За сите останати параметри ќе има повеќе од 8 точки кои ќе ги опишат нивните осцилации.

Врз основа на вредноста на оптималниот временски прозорец, за случај на фреквенции во кардиореспираторниот опсег, кога динамичкиот шум не е премногу мал, вредноста на оптималниот параметар на пренесување може да се одреди како:

$$p_{w,opt} = \begin{cases} 0,1, & t_{w,opt} > 40 \text{ s} , \\ 0,2, & t_{w,opt} \in [10 \text{ s}, 40 \text{ s}], \\ 2/t_{w,opt}, & t_{w,opt} < 10 \text{ s} . \end{cases} \quad (5.4)$$

Со вака добиените вредности за временскиот прозорец $t_{w,opt}$ и параметарот на пренесување $p_{w,opt}$ се спроведува втора, оптимизирана инференција. При оваа инференција коваријансната матрица ќе има помали вредности, што значи дека инференцијата ќе биде подобрена.

Доколку е шумот многу мал, вредностите за параметарот на пренесување $p_{w,opt}$ треба да се зголемат.

6. ПОТВРДА НА ПРОТОКОЛОТ ПРЕКУ АНАЛИЗА НА СПРЕГНАТИ ОСЦИЛАТОРИ НА ГРАНИЧЕН ЦИКЛУС

Со цел тестирање на предложениот алгоритам за одредување на оптималниот временски прозорец и параметарот на пренесување на коваријансната матрица, разгледуваме и втор систем од два спрегнати осцилатори на граничен циклус. Како пример за неавтономен систем на граничен циклус, чие динамичко поле може да се земе со експлицитна временска зависност, разгледуваме систем од два спрегнати осцилатори на Поанкаре. Во автономен случај, во поларни координати (r, ϕ) , на граничниот циклус системот ротира со константна фреквенција, привлечен со експоненцијална брзина кон радиусот и е зададен со равенките:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r), \\ \dot{\phi} &= \omega.\end{aligned}\tag{6.1}$$

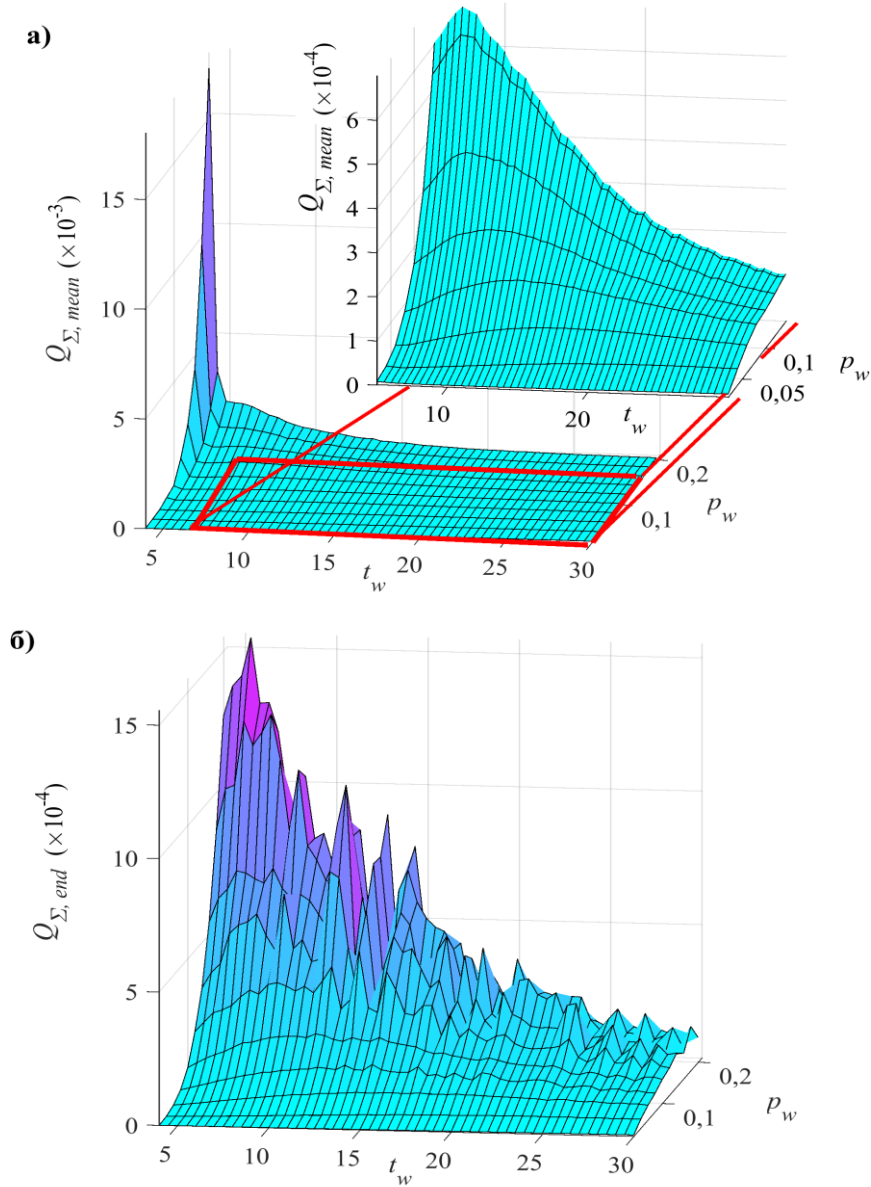
Во овој систем величината ϕ истовремено е и аголната променлива и фазата на осцилаторот, поради што ваквиот осцилатор е изохрон. Значајна предност во разгледувањето на овој осцилатор е дека сигналот е чисто синусоиден без фреквентни хармоници од повисок ред, што овозможува подобра следливост на промените на фреквенцијата во времето. Како модел за два осцилатори на Поанкаре кои слабо заемнодејствуваат, во присуство на бел шум, во Евклидови координати $(x = r \cos \phi, y = r \sin \phi)$, го користиме системот претставен со равенките:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - 1\right)x_1 - \omega_1(t)y_1 + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \dot{y}_1 &= -\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - 1\right)y_1 + \omega_1(t)x_1 + \varepsilon_1(y_2 - y_1) + \xi_2(t), \\ \dot{x}_2 &= -\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - 1\right)x_2 - \omega_2(t)y_2 + \varepsilon_2(t)(x_1 - x_2) + \xi_3(t), \\ \dot{y}_2 &= -\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - 1\right)y_2 + \omega_2(t)x_2 + \varepsilon_2(t)(y_1 - y_2) + \xi_4(t).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Во нумеричките симулации што беа спроведени, периодичната временска променливост е внесена во фреквенцијата на првиот осцилатор $\omega_1(t) = 1 - 0,4\sin 2\pi f_1 t$ и во параметарот на спрега од првиот кон вториот осцилатор $\varepsilon_2(t) = 0,2 - 0,1\sin 2\pi f_2 t$. Шумовите се повторно бели и Гаусови, без корелација меѓу нив и се менуваат во интервалот $E_i \in [0,005, 0,05], i = 1,2,3,4$. Останатите користени параметри имаат вредности $\omega_2 = 4,9$ и $\varepsilon_1 = 0,05$. Фреквенцијата на временската променливост ја менувавме во интервалот $f_i \in [0,0015, 0,02], i = 1,2$.

Поради самата природа на спрегнатите осцилатори на Поанкаре, проценката на фазите на осцилаторите се врши како $\phi_i = \arctan \frac{y_i}{x_i}$.

На слика 6.1 е прикажан типичен резултат од симулациите како квадратурната коваријансна матрица Q_Σ се менува со промена на временскиот прозорец и параметарот на пренесување.



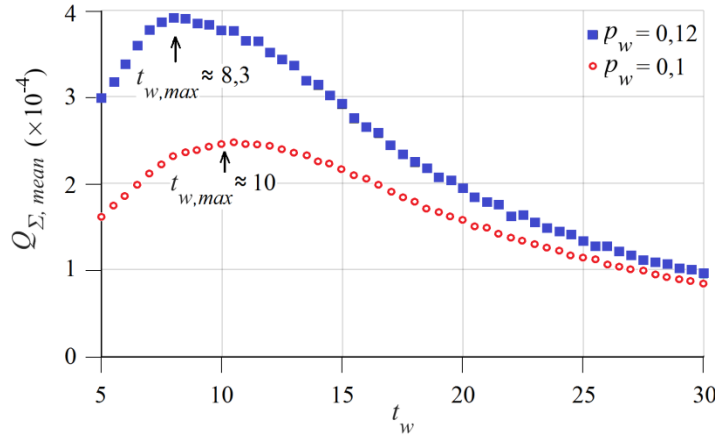
Слика 6.1 – Типичен изглед на зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец и параметарот на пренесување за спрегнати осцилатори на Поанкаре опишани со равенките (6.2). а) Средна вредност на коваријансната матрица за сите блокови на инференцијата, со исклучок на првите два блока. б) Коваријансната матрица за инференцијата од последниот блок.

Притоа, на слика 6.1 а) е прикажана средната вредност на коваријансната матрица $Q_{\Sigma, mean}$ усреднета по сите блокови на инференцијата со исклучок на првите два, додека на слика 6.1 б) е прикажана коваријансната матрица само за последниот блок од инференцијата. При симулациите за добивање на 3Д графиците како прикажаните на сл.6.1 сите инферираните вредности се усреднети на помеѓу 5 и 50 траектории во фазниот простор.

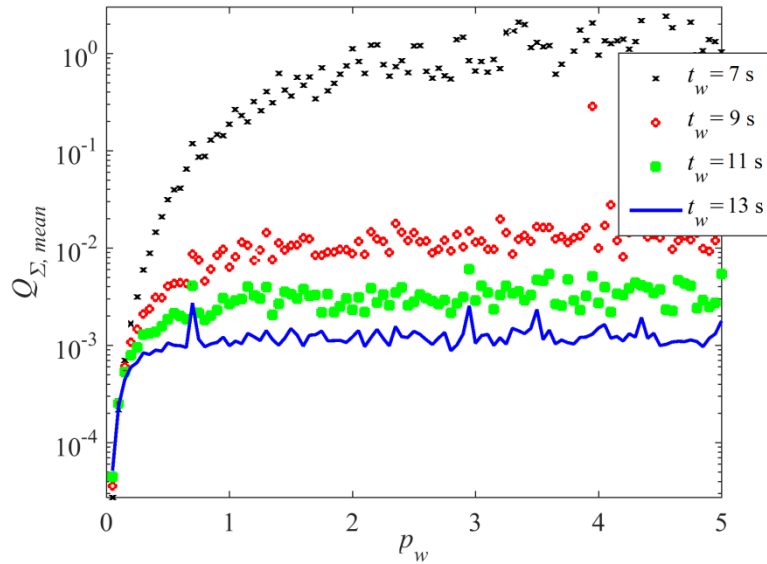
Слично како во случајот на спрегнати фазни осцилатори и тука кривата на зависност на коваријансната матрица Q_{Σ} од временскиот прозорец t_w покажува максимум. И во овој случај спроведените анализи покажаа дека за сите комбинации на параметрите t_w и p_w кои ја поставуваат инференцијата на лево од максимумот на соодветната крива $Q_{\Sigma} = Q_{\Sigma}(t_w)$, инференцијата не ги следи временските промени на параметрите и влегува во режим на одложена инференција. Разликата од случајот на фазни осцилатори е дека тука, при исти вредности на параметрите t_w и p_w , коваријансната матрица има значително помали апсолутни вредности, па поради тоа најмалата вредности на временскиот прозорец за која кодот во Матлаб може да ја спроведе целосно инференцијата е нешто поголема. Од таа причина во овој случај беше неопходно да се користат поголеми вредности за временскиот прозорец при иницијалната инференција. Така на пример, кај фазните осцилатори иницијалната инференција можеше да се спроведе со временски прозорец 1-2 s, додека кај осцилатори на Поанкаре беше потребен временски прозорец од 3-5 s за иницијалната инференција. Ова е целосно очекувано, бидејќи сепак, станува збор за различен систем спрегнати осцилатори.

За вредности на временскиот прозорец $t_w > t_{w, max}$, како што се гледа на слика 6.1 коваријансната матрица Q_{Σ} повторно монотонно опаѓа и тоа опаѓање е истовремено пропратено со намалување на отстапувањето на инферираните параметри од нивните вистински вредности. Повторно, како и во случајот на фазни осцилатори, максимумот на зависноста на коваријансната матрица од временскиот прозорец се добива за вредност на временскиот прозорец реципрочна на параметарот на пропагација $t_{w, max} = 1/p_w$, што е прикажано на сликата 6.2.

Анализите исто така покажуваат дека за фиксен временски прозорец, коваријансната матрица Q_{Σ} расте со зголемување на параметарот на пренесување. Зависноста на матрицата Q_{Σ} од параметарот p_w за големи вредности на параметарот на пренесување постигнува заситување, што е прикажано на сликата 6.3. Поради големиот негативен градиент на кривата $Q_{\Sigma} = Q_{\Sigma}(p_w)$, $t_w = const$, на сликата 6.3 оската на коваријансната матрица е прикажана во логаритамска скала.



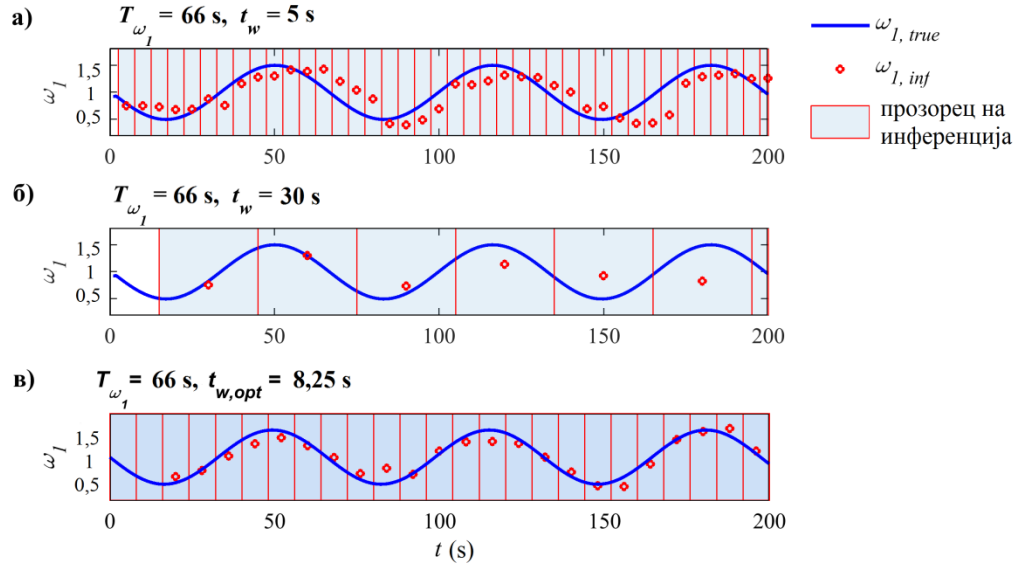
Слика 6.2 – Зависност на коваријансната матрица од временскиот прозорец за две различни вредности на параметарот на пренесување, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре.



Слика 6.3 – Зависност на коваријансната матрица од параметарот на пренесување за четири различни вредности на временскиот прозорец, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре.

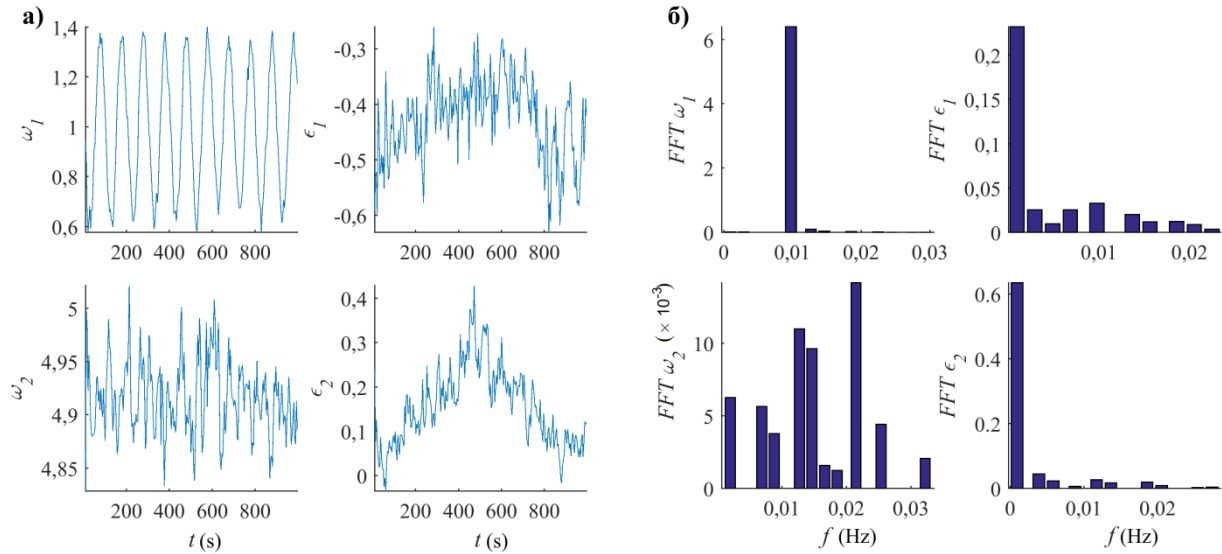
Резултатите, од кои дел се презентирани на сликите 6.1 до 6.3, ги потврдуваат заклучоците од анализите на спрегнатите фазни осцилатори од претходната глава, дека за да се постигне инференција со поголем квалитет треба да се користи што е можно поголем временски прозорец. Меѓутоа, како што е дискутирано погоре, со зголемување на временскиот прозорец ја намалуваме можноста за соодветно опишување на временската променливост на параметрите и поради тоа, во протоколот за аДБИ оптималниот временски прозорец се избира како една осмина од периодот на параметарот којшто

најбрзо осцилира. На таков начин за најбрзо променливиот параметар ќе има осум точки (осум блока на инференција) кои ќе опишуваат една негова полна осцилација. За сите останати параметри ќе има повеќе инферирани точки за еден период на нивните осцилации. Ова е прикажано на слика 6.4 за случај на осцилатори на Поанкаре за фреквенцијата ω_1 како параметар чии промени се најбрзи.



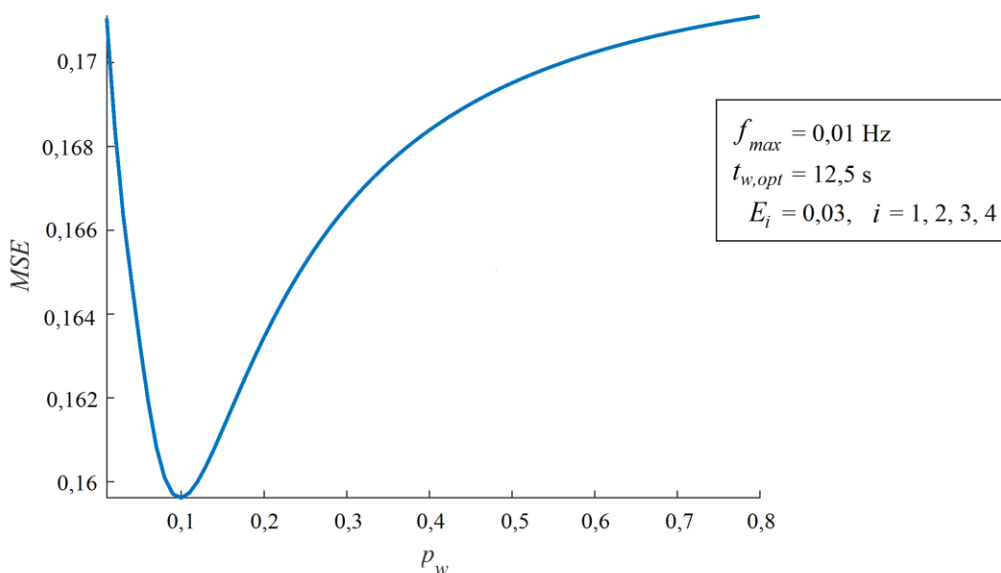
Слика 6.4 – Влијание на временскиот прозорец врз опишувањето на временската променливост, за случај на спрегнати осцилатори на Поанкаре; а) мал, б) голем и в) оптимален временски прозорец.

За разлика од случајот на фазни осцилатори, каде што базните функции при ДБИ беа однапред познати, при декомпозицијата на фазната динамика во овој случај се користи Фуриеов развој од втор ред, што значи дека се користат 2×25 базни функции. Тоа значи дека, слично како во општ случај кога се проучува непознат осцилаторен систем, ќе има вкупно $2 \times 25 = 50$ параметри чие поведење треба да се инферира. Со спроведување на иницијалната инференција, согласно протоколот за АДБИ, ги добиваме параметрите на моделот и како тие се менуваат во текот на времето. За да го најдеме параметарот чии промени се најбрзи, со Матлаб спроведуваме брза Фурие трансформација и со користење на графикон со столпчиња, графички ги претставуваме најзастапените десет фреквенции на осцилаторни промени за секој параметар. Истовремено, графички ги прикажуваме и временските промени на секој од параметрите. На слика 6.5 се прикажани резултатите од иницијалната инференција само за четирите параметри од интерес. На слика 6.5 а) се прикажани инферираните временски промени на параметрите, додека на слика 6.5 б) се прикажани нивните брзи Фурие трансформации. За резултатите прикажани на сликата 6.5 користената максимална фреквенција на временската променливост на параметрите имаше вредност $f_{max} = 0.01$ Hz, а вредноста за оптималниот временски прозорец која беше инферирана имаше вредност $t_{w,opt} = \frac{T_{min}}{8} = \frac{1}{8f_{max}} = 12.5$ s.



Слика 6.5 – Иницијална инференција на параметрите од систем спрегнати осцилатори на Поанкаре. На сликата се прикажани само четирите параметри од интерес; а) инферирани параметри, б) брза Фурије трансформација со Матлаб на соодветните инферирани параметри.

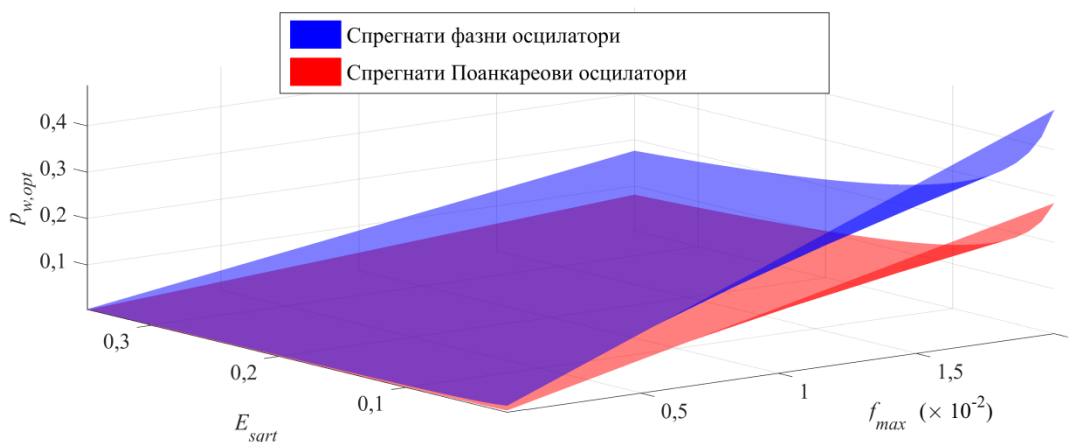
Како што е прикажано на слика 6.3, откако е одреден временскиот прозорец, параметарот на пренесување треба да е што е можно помал. Истовремено, согласно резултатите на сликите 6.1 и 6.2 и следењето на промените на параметрите, параметарот на пренесување треба да е поголем од $1/t_{w,opt}$, за инференцијата да не влезе во режим на одложена инференција. Со цел тестирање на предложениот протокол за негова валидност за систем осцилатори на Поанкаре, слично како во случај на фазни осцилатори, беше следена разликата помеѓу инферираните временски променливи параметри и нивните вистински вредности, за различни фреквенции кои соодветствуваат на интервалот на кардиореспираторните интеракции и за различни јачини на шум. Ваквите иследувања беа правени преку евалуирање на графици соодветни на прикажаниот на слика 5.4 од претходната глава. Исто така, повторно, разликата ја евалуиравме и преку одредување на средната квадратна грешка меѓу кривите на инферираната и вистинската временска промена на соодветните параметри, со користење на функцијата MSE, при инференции со оптимален временски прозорец. При инференцијата првите два блока беа исклучени. За различни параметри на пренесување беше пресметана средната квадратна грешка и графички прикажана зависноста $MSE = MSE(p_w)$. На сликата 6.6 е прикажан типичен пример на зависноста $MSE = MSE(p_w)$, при временски прозорец $t_w = t_{w,opt}$ за случај на осцилатори на Поанкаре.



Слика 6.6 – Типичен пример на зависноста на средната квадратна грешка меѓу четирите инферирани параметри и нивните вистински вредности како функција од параметарот на пренесување, при оптимален временски прозорец.

Со помош на вакви иследувања се потврди дека оптималната вредност на параметарот на пренесување зависи и од вредноста на оптималниот временски прозорец, т.е. од вредноста на фреквенцијата на параметарот кој набрзо се менува и од јачината на шумот. За јачините на шумот во испитуваниот интервал, беше потврдено дека оптималниот параметар на пренесување приближно линеарно зависи од максималната фреквенција на осцилациите на параметрите f_{max} . Коефициентот на правец и отсечокот на оваа линеарна зависност зависат од квадратурата на шумот $E_{sqr} = \sqrt{E_{11}^2 + E_{22}^2}$, каде што величините E_{ij} се инферираните јачини на шумот долж главната дијагонала. Зависноста на коефициентот на правец од квадратурата на шумот, како и зависноста на отсечокот од квадратурата на шумот приближно се опишуваат со инверзна степенска функција, слично како во случајот на фазни осцилатори, прикажано на сликата 5.9 од претходната глава. Очекувано, коефициентите на инверзната степенска функција со кои беа фитувани добиените резултати беа различни од случајот на фазни осцилатори. Но, притоа, вредностите добиени за оптималниот параметар на пренесување беа секогаш помали од вредностите добиени за случајот на фазни осцилатори. Ова може да се објасни со тоа дека случајот на спрегнати фазни осцилатори може да се смета за поопшт случај, кој во себе го вклучува и случајот на осцилатори на граничен циклус. Фактот што добиените вредности за оптималниот параметар на пренесување за случај на осцилатори на Поанкаре се секогаш помали од оние за фазни осцилатори укажува на тоа дека предложениот протокол за аДБИ ќе даде задоволителни резултати, но поради поголемата вредност за параметарот на пренесување која следи од протоколот, во инференцијата ќе

биде вклучен нешто поголем динамички шум. На слика 6.7 е прикажано како случајот на фазни осцилатори го опфаќа случајот на осцилатори на Поанкаре, од аспект на поголем параметар на пренесување од оптималниот, при исти максимални фреквенции на осцилаторните промени на параметрите и квадратура на шумот.



Слика 6.7 – Оптималниот параметар на пренесување како функција од максималната фреквенција на промена на параметрите и од квадратурата на инферираниот шум за спрегнати фазни и спрегнати осцилатори на Поанкаре.

Од презентираниите анализи на резултатите добиени за систем од спрегнати осцилатори на Поанкаре, може да заклучиме дека протоколот за аДБИ, како што е предложен во глава 5.3 дава подобрена инференција на моделот кој го опишува временски променливиот динамички систем, во однос на произволното избирање на временскиот прозорец и параметарот на пренесување. Треба да се нагласи дека испитувањата се направени за фреквенции од интервалот кои се среќаваат при проучување на кардиореспираторните заемнодејства во човековиот организам, што ќе претставува едно ограничување во применливоста на овој метод.

7. ПРИМЕНА НА ПРОТОКОЛОТ НА КАРДИОРЕСПИРАТОРНИ ЗАЕМНОДЕЈСТВА

Природата е исполнета со осцилаторни системи преку чија интеракција се подржува животот. Како дел од природата и човековиот организам содржи повеќе системи од органска природа кои манифестираат осцилаторно поведение. Ваквите органски системи се цел на проучување на физиологијата, која е одредена како дел од биологијата кој настојува да ги објасни механизмите на живите суштества, почнувајќи од основите на клеточната функција на молекуларно ниво, па сè до поведението на телото како целина, интегрирано во еден поширок еко систем сочинат од повеќе различни видови.

Во фокус на ова истражување се кардиореспираторните интеракции кај човекот, поради што е неопходно да дадеме краток вовед во дел од физиолошките системи на човечкото тело. Подетални објаснувања на физиолошките основи можат да се најдат во литературата [12, 13].

7.1 Физиолошки основи на кардиореспираторните осцилации

7.1.1 Кардиоваскуларен систем

Главните задачи на кардиоваскуларниот систем се пренесување на кислород и хранливи материи од надворешната средина до секоја клетка на организмот и пренесување на отпадните материи и јаглеродниот диоксид од секоја клетка назад во надворешната средина. За таа цел, кардиоваскуларниот систем е составен од сложена мрежа на крвоносни органи кои досегнуваат до секоја поединечна клетка. Се состои од три главни делови: срце, крвни садови и крв. Според кардиоваскуларната функција, овој систем опфаќа пулмонарна и системска (периферна) циркулација. Пулмонарната циркулација го овозможува процесот на размена на гасови на крвта со надворешната средина, кој се одвива во белите дробови, додека системската циркулација овозможува снабдување на останатите делови од телото со оксигенирана крв.

Срцето е орган кој дејствува како пумпа која вклучува две одделни пумпи, лева и десна и секоја од нив е составена од преткомора (атриум) и комора (вентрикула). Десната страна на срцето служи да ја собере деоксигенираната крв од телото и да ја испумпа во белите дробови каде што се врши нејзина оксигенација. Оксигенираната крв се собира во левата преткомора и од левата комора се испумпува преку крвните садови до секоја клетка од телото. Процесот на контракција (систола) и релаксација (дијастола) на срцевият мускул периодично се повторува, правејќи го системот осцилаторен. Ритамот на срцевата работа се одржува од синоатријалниот јазол кој на тој начин го дефинира пулсот.

Вообичаено, при мирување на човекот, волуменот на крв испумпана од срцето има вредност од околу 5 l/min.

Крвните садови се делат на три типа: артерии, вени и капилари. Артериите ја пренесуваат оксигенираната крв од срцето до ткивата, додека вените ја враќаат деоксигенираната крв во срцето. Левата комора на срцето ја испумпува оксигенираната крв во аортата. Од неа крвта преминува во главните артерии кои се разгрануваат во мускулни артерии и потоа во микроскопски артериоли. Артериолите се разгрануваат во капиларни мрежи кои ги снабдуваат ткивата со кислород и хранливи материи. Откако капиларите ќе го ослободат кислородот и хранливите материи во ткивата, тие ја пренесуваат крвта во микроскопски венски гранки, наречени венули. Од венулите, крвта се пренесува во вените, кои што ја враќаат во срцето преку таканаречената вена кава. Сидовите на артериите се подебели од сидовите на вените, со повеќе мазно мускулно и еластично ткиво, бидејќи треба да го издржат големиот притисок кој се создава при испумпување на крвта од срцето. Ваквата структура овозможува ширење на артериите при пумпањето на крвта во нив. Капиларите се мали крвни садови кои се разгрануваат од артериолите во мрежи околу клетките на телото. Во белите дробови кислородот од вдишаниот воздух, преку капиларите, се апсорбира во крвта и истовремено се ослободува јаглеродниот диоксид за издишување. На другите места во телото, кислородот и хранливите материи дифундираат од крвта во капиларите во ткивата. Капиларите го апсорбираат јаглеродниот диоксид и отпадните материи од ткивата и ја враќаат деоксигенираната крв во вените.

Крвта е специјална течност чија главна функција е транспорт на материи низ телото. Се состои од течност наречена крвна плазма, во која се суспендирани крвни клетки. Крвната плазма сочинува 55% од крвта, воглавно е вода (92%), а содржи и протеини, глукоза, минерали, хормони, како и самите крвни клетки. Од крвните клетки најбројни се црвените крвни клетки (еритроцити), белите крвни клетки (леукоцити) и тромбоцитите.

7.1.2 Ритмичност на срцевата работа

Срцевата работа е примарно контролирана од автономниот нервен систем. Автономниот нервен систем е одговорен за контрола на многу физиолошки функции во организмот, меѓу кои и за индуцирање на контракциите на срцето, за периферната отпорност на крвните садови, како и за срцевиот ритам. Се дели на симпатичен и парасимпатичен дел, кои работат координирано на остварување на рамнотежа во организмот. Парасимпатичниот дел доведува до забавување на срцевата работа, додека симпатичниот доведува до нејзино забрзување и до зголемување на контракцијата на срцевиот мускул.

Ритмичкото поведение на срцето се одржува преку побудувачки сигнали генерирани во самото срце од специјализираните клетки на синоатријалниот јазол, кој игра улога на примарен пејсмејкер на срцето.

Парасимпатичните нерви се разгрануваат од нервот вагус на двете страни на цервикалната регија на рбетниот мозок. Десната гранка на нервот вагус оди до десната преткомора и се концентрира во синоатријалниот јазол, додека левата гранка оди до атриовентрикуларниот јазол. Доминантно влијание на срцевата работа има стимулацијата на десната гранка. Кога телото е во состојба на мирување синоатријалниот јазол ја одржува срцевата работа на околу 60 контракции во минута. Левата гранка влијае на брзината на пренесување на електричните импулси од преткоморите до коморите на срцето, а со тоа и на времето помеѓу атријалната и вентрикуларната контракција. На ваков начин и левата гранка влијае на ритмот на срцевата работа, иако во помала мера. Влијанието на парасимпатичните нерви на коморите е мало. Тоа е индиректно и служи само за намалување на симпатичното влијание.

Симпатичните нерви доаѓаат од горниот торакален сегмент на рбетниот мозок. Тие се рамномерно распределени низ сите делови на срцето. Нивната стимулација ја забрзува срцевата работа преку зголемување на ритмичноста на синоатријалниот јазол и преку засилување и забрзување на контракциите на мускулите и на преткоморите и на коморите. Симпатичните нерви го подготвуваат телото за стресни состојби, при кои се јавува потреба за максимална прилагодливост на пумпните механизми на срцето.

7.1.3 Електромеханичка активност на срцето

Уште од утврдувањето на електричната активност која ја следи работата на срцето, во првата половина на XIX век, се правеле обиди за нејзино проучување и искористување во медицински цели. Денес е познато дека клетките на срцевиот мускул при ненапрегната состојба се поларизирани, односно вкупниот полнеж на внатрешната и надворешната страна на клеточната мембрана е различен. Тоа е причинето од механизмот за активен транспорт на клеточната мембрана кој доведува до вишок од позитивни натриумови и калциумови јони на надворешната и вишок од негативни хлорни јони на внатрешната страна на мембраната. Поради тоа се јавува потенцијална разлика на двете страни на мембраната. Кај срцевиот мускул, оваа потенцијална разлика има вредност од приближно 90 mV за вентрикуларните клетки, додека за атријалните е приближно 70 mV. Разликата во полнежите долж површината на мембраната доведува до појава на диполни моменти. Но, секој од овие индивидуални диполни моменти е анулиран со соодветниот диполен момент на спротивната страна на клетката, па вкупниот диполен момент на клетката е нула.

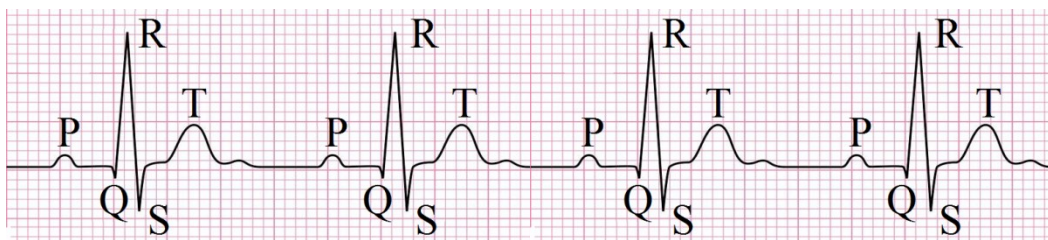
Доколку во некоја точка од клетката се донесе потенцијал од околу -70 mV , ќе се наруши активниот транспорт на мембраната во таа точка и низ мембраната ќе се придвижат јони со цел постигнување на рамнотежа. Рамнотежната состојба ќе се состои од вишок позитивни јони во внатрешноста на клетката кој дава потенцијал во внатрешноста од околу $+10\text{ mV}$. Ваквата потенцијална разлика во таа точка од клетката ќе предизвика слични нарушувања и во соседните точки на мембраната креирајќи на тој начин бран на деполаризација кој поминува низ клетката со извесна брзина. Во таков случај веќе индивидуалните диполни моменти не се поништуваат, па вкупниот диполен момент на клетката нема да биде нула.

Кога клетката е целосно деполаризирана доаѓа до зголемување на концентрацијата на калциумовите анјони во нејзината внатрешност, што дејствува како катализатор на хидролизата на аденозин трифосфатот и доведува до контракција на клетката. Во ваквата деполаризирана состојба индивидуалните диполни моменти се со обратна насока, а вкупниот диполен момент на клетката повторно е нула поради урамнотежувањето со диполниот момент на спротивната страна на клетката. По приближно 250 ms се воспоставува нормалниот режим на работа на клеточната мембрана и таа почнува да го исфрла вишокот анјони надвор и да внесува вишок катјони внатре во клетката. На тој начин, по бранот на деполаризација следи бран на реполаризација.

На ниво на ткиво, индивидуалните клетки се насочени во ист правец и во нив се случуваат аналогни процеси на деполаризација и реполаризација. При простирањето на бранот на деполаризација од клетка на клетка, доаѓа до контракција на мускулот. При простирање на бранот на реполаризација, мускулот се опушта.

Иницијалниот електричен импулс кој доведува до бран на деполаризација и мускулна контракција, се генерира во синоатријалниот јазол. Бранот на деполаризација се шири низ левата и низ десната преткомора, а потоа и низ венрикулите. Бранот на реполаризација и мускулна релаксација следи по истиот редослед.

Деполаризацијата и реполаризацијата на срцето можат да се мерат со електроди на површината на кожата, со инструмент наречен електрокардиограф, кој дава излез наречен електрокардиограм (ЕКГ). Електричните потенцијали се мерат со електроди кои се поставуваат на различни точки на телото. Електричниот сигнал се добива како разлика во потенцијали детектирани од плус и минус електродите, во однос на трета заземјена електрода. Типичен ЕКГ сигнал е прикажан на сликата 7.1. Секој дел од ЕКГ сигналот ја претставува електричната активност во одреден дел од срцето, а специфичните врвови се означени како пе-ку-ер-ес-те („P-Q-R-S-T“), при што вообичаено ер врвот ја има максималната вредност во најголемиот број конфигурации на електроди.



Слика 7.1 – ЕКГ сигнал со карактеристичните врвови.

Стандардната анализа се состои во евалуирање на временските интервали помеѓу карактеристичните врвови. Договорно, врвовите се наречени бранови, а растојанието меѓу две специфични точки на ЕКГ кривата е наречен сегмент. Времето помеѓу два врва се нарекува интервал, а комбинацијата на повеќе врвови се вика комплекс. Така разликуваме пе и те бранови, пе-ер и ес-те сегменти, пе-ер и ку-те интервали, ку-ер-ес комплекс итн. На ЕКГ кривата се разликува атријален и вентрикуларен дел, како и состојбите кога валвулите се отворени и затворени. За време на пе бранот екситацијата се шири преку двете преткомори и продолжува и за време на пе-ку сегментот. Ку-ер-ес комплексот соодветствува на екситација на двете комори, а те бранот се однесува на враќањето на вентрикулите во деекситирана состојба. На крајот на ер врвот се затвора митралната валвула, која ги поврзува левата преткомора и комора, а на крајот на ку-ер-ес комплексот се отвора аортната валвула. Притоа крвта се истиснува од срцето во аортата. Оваа фаза на срцевиот циклус е наречена систола.

На крајот на те бранот се затвора аортната валвула и кратко потоа се отвора митралната валвула за да овозможи премин на крвта од преткомората во комората. Ова е фазата на полнење на срцето наречена дијастола. Слични фази се одвиваат и во десниот дел на срцето при што периодот на исфрлување на крвта почнува нешто порано, а систолата нешто подоцна. Овие временски разлики се релативно мали, од ред на големина 10 до 30 ms и не влијаат значително на динамиката на протокот на крвта. Соодветните валвули во десното срце се наречени трискупидна и пулмонална валвула, при што трискупидната и митралната валвула се наречени атриовентрикуларни валвули, додека аортната и пулмоналната се наречени артеријални или полумесечести валвули.

Еден од најпроучуваните осцилаторни процеси поврзани со срцевата работа е варијабилноста на срцевата рата (BCP), за која се смета дека може да претставува индекс за здрав кардиоваскуларен систем, бидејќи при многу болести (депресија, автоимуни болести, хипертензија, срцева слабост) е утврдено нејзино нарушување [59]. Поради тоа, постои широк интерес за проучување на заемнодејствата кои доведуваат до BCP како и за утврдување на нејзината физиолошка улога. Во таа насока, во литературата се среќаваат истражувања на PCA [57, 59, 104, 105], кардиовентилаторната спrega, одредена како синхронизација помеѓу срцевиот пулс и почетокот на вдишувањето [106, 107], како и на синхронизацијата на респираторниот ударен волумен, претставена преку константната

фазна разлика помеѓу левиот и десниот ударен волумен за време на еден респираторен циклус [108, 109, 110].

7.1.4 Респираторен систем

Респираторниот систем е составен од повеќе органи кои имаат за цел внесување на кислород во организмот и исфрлување на јалероден диоксид од него [111]. Примарни органи на респираторниот систем се белите дробови, во кои се одвива размената на гасови при дишењето. Белите дробови преку циркулаторниот крвен систем ги снабдуваат со кислород сите клетки во телото. Крвта го собира јаглеродниот диоксид и останатите отпадни материи од клетките и ги транспортира до белите дробови, каде што јаглеродниот диоксид се исфрла од крвта при издишувањето.

При вдишувањето, кислородот влегува низ носот (или устата) и поминува преку синусите, кои помагаат во регулирањето на температурата и влажноста на вдишаниот воздух. Воздухот потоа поминува низ дишникот и преку бронхиите влегува во секое од белодробните крила. При влегувањето во белодробното крило, секоја бронхија се разгранува како дрво на уште помали цевчиња – бронхиоли, кои што преминуваат во мали сунѓераста кесиња наречени алвеоли. Алвеолите се исполнети со мали крвни садови наречени белодробни капилари и во нив се одвива размената на гасови. Крвта од капиларите го испушта јаглеродниот диоксид и се збогатува со кислород преку процес на дифузија. Оксигенираната крв понатаму продолжува преку белодробната вена до левата страна на срцето од каде што се испумпува во телото. Јаглеродниот диоксид кој останува во алвеолите се исфрла при следното издишување.

Респираторниот процес е периодично повторлив и неговиот осцилаторен циклус е составен од два потпроцеси – вдишување и издишување. Просечната фреквенција на респирација, за здрава индивидуа во состојба на одмор, е помеѓу 12 и 16 здива во минута, додека при напор може да се зголеми до 40, па и до 60 здива во минута.

7.1.5 Осцилаторни процеси во кардиореспираторниот систем

Истражувањата на осцилаторните процеси во кардиоваскуларниот и во респираторниот систем укажуваат на постоење на неколку процеси со различни фреквенции на осцилирање [7, 28, 29]. Во табела 7.1 се дадени утврдените фреквентни интервали, а подолу и нивната физиолошка интерпретација.

Интервалот на фреквенции околу 1 Hz (интервал I во табела 7.1) соодветствува на осцилаторната активност на срцето, која се состои во периодични контракции и релаксации на срцевиот мускул, кои доведуваат до периодично уфрлање на крв во аортата.

Табела 7.1 - Интервали на фреквенции за различните осцилаторни процеси во кардио-респираторниот систем.

Интервал на фреквенции	Фреквенција (Hz)	Физиолошко потекло
I	0,6 - 2	Срцева работа
II	0,145 - 0,6	Респираторно
III	0,052 - 0,145	Миогено
IV	0,021 - 0,052	Неурогено
V	0,0095 - 0,021	Ендотелно метаболно
VI	0,005 - 0,0095	Ендотелно

Интервалот на фреквенции околу 0,2 Hz (интервал II во табела 7.1) соодветствува на осцилаторната активност на белите дробови при процесите на вдишување и издишување.

Интервалот на фреквенции околу 0,1 Hz (интервал III во табела 7.1) соодветствува на миогената активност. Како резултат на зголемување на интраваскуларниот притисок при внесување на крвта во васкуларниот систем, васкуларните мазни мускули се контрахираат. Обратно, при намалување на притисокот на крвта тие се релаксираат. На таков начин крвните садови помагаат во контрола на крвниот притисок преку процес означен како миогена авторегулација.

Интервалот на фреквенции околу 0,04 Hz (интервал IV во табела 7.1) потекнува од влијанијата на автономниот нервен систем врз срцето, белите дробови и крвните садови. Нервите доведуваат до ослободување на супстанции кои влијаат на активностите на мазните мускули, кои од своја страна доведуваат до промени на радиусите и на еластичноста на крвните садови, што ја овозможува вазоконстрикцијата.

Интервалот на фреквенции околу 0,01 Hz (интервал V во табела 7.1) соодветствува на ендотелната активност поврзана со азот оксидот. Помеѓу ткивото на крвниот сад и самата крв се наоѓа слој од ендотелни клетки кои овозможуваат регулација на метаболизмот и преку ослободување на различни супстанции доведуваат до контракции и релаксации на мазните мускули на крвниот сад.

Осцилациите со фреквенции помали од 0,01 Hz (интервал VI во табела 1.1) се со потекло од ендотелната активност независна од азот оксидот.

7.2 Методи користени при истражувањето

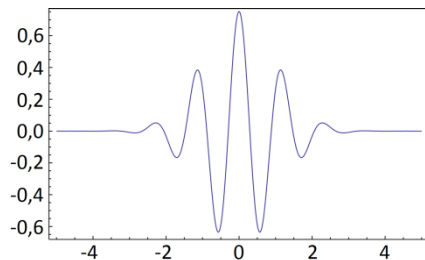
7.2.1 Вејвлет анализа

Како што е познато од теоријата на Фурие, периодично повторлив сигнал може да се претстави во форма на Фуриеов ред, кој претставува бесконечен збир од синусни и косинусни членови. Разложувањето на сигналот во Фуриеов ред овозможува негово фреквентно разложување т.е овозможува утврдување кои сè фреквенции се присутни во сигналот, но, не ја содржи временската информација во себе, т.е. не е можно да се утврди која фреквенција кога е присутна во сигналот. За надминување на овој проблем се предложени повеќе решенија кои овозможуваат претставување на сигналот истовремено и во временски и во фреквентен домен. Основната идеја на овие методи се состои во разделување на сигналот од интерес на повеќе делови и потоа анализирање на секој од овие делови посебно. Еден од современите методи за ваква временско-фреквентна анализа е вејвлет анализата, позната и како вејвлет трансформација [29, 55, 56]. Во вејвлет анализата, за разделување на сигналот од интерес се користи модулиран прозорец кој што може да се рескалира. Ваквиот прозорец се движи долж сигналот и за секоја негова позиција се пресметува спектарот. Постапката се повторува повеќе пати со малку пократок (или подолг) прозорец во секој следен циклус. Конечниот резултат е множество на временско-фреквентни репрезентации на сигналот со различни резолуции.

Функцијата со која што се опишува модулираниот прозорец се нарекува вејвлет-мајка. Во анализите кои што ги спроведувавме, како вејвлет-мајка се користеше Морлет вејвлетот опишан со равенката:

$$v(u) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-i2\pi f_0 u} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (7.1)$$

Графички приказ на Морлет вејвлетот е даден на слика 7.2. Во равенката (7.1) централната фреквенција беше земено дека има вредност од $f_0=1$ Hz.



Слика 7.2 – Графички приказ на Морлет вејвлет.

Со рескалирање и транслација на овој вејвлет-мајка се добиваат вејвлетите:

$$\Psi_{s,t}(u) = |s|^{-1/2} \cdot v\left(\frac{u-t}{s}\right), \quad (7.2)$$

каде што променливата s е факторот на скалирање, а променливата t е факторот на транслација. Во истражувањето, временската скала која ја користевме е линеарна, додека за фреквенцијата користевме логаритамска скала, па затоа факторот s беше експоненцијално зголемуван.

Вејвлет трансформот претставува конволуција на вејвлетот и оригиналниот сигнал:

$$W(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_{s,t}(u) g(u) du, \quad (7.3)$$

каде што променливата $\bar{\Psi}$ е комплексниот коњуѓат од променливата Ψ . На ваков начин анализата, во смисла на фреквенцијата, не зависи од скалирањето. Густината на енергијата во временскиот домен се одредува од вејвлет трансформот, па јачината на вејвлетот во фреквентниот интервал $[f_1, f_2]$ е дадена со:

$$\varepsilon(f_1: f_2) = \int_{1/f_2}^{1/f_1} \frac{1}{s^2} |W(s, t)|^2 ds. \quad (7.4)$$

При пресметување на вејвлет трансформот, мерените сигнали се ресемплирани до 100 Hz, а делот од нивните спектри под најниската анализирана фреквенција 0,09 Hz е отстранет со помош на техниката на подвижна средна вредност.

7.2.2 Екстракција на фазите од мерените сигнали

Еден од основните предуслови за примена на било кој метод за проучување на интеракции на осцилаторни системи базиран на фазната динамика е соодветната проценка на моментните фази од мерените временски серии. Значењето на соодветната екстракција на моментните фази е уште поголемо кога се проучуваат временски променливи осцилаторни динамики. Ова е особено изразено кога и самите мерни сигнали потекнуваат од сложени осцилаторни системи, кои во себе вклучуваат повеќе осцилаторни компоненти и модови, како што е на пример ЕКГ сигналот. Поради тоа, неопходно е да ги разгледаме и дискутираме постоечките методи за фазна детекција, како и ограничувањата во нивната примена.

Во основа постојат два различни методи за детекција на фазата, кои се користат зависно од формата на сигналот.

Во првиот метод, наречен метод на означени настани, се смета дека интервалот меѓу два добро дефинирани настани, кои периодично се повторуваат, претставува еден циклус и притоа фазното зголемување помеѓу двата настани се смета дека е точно 2π .

Процедурата е слична на одредување на напречен пресек на Поанкаре на фазниот портрет на атракторот [4]. Во ваков случај, циклусот е опишан со само една точка, додека за останатите точки се прави линеарна интерполација. Имено, за настаните k во време t_k се смета дека фазата има вредност од $\varphi(t_k) = 2\pi k$, додека за било кој друг настан во време t , каде што $t_k < t < t_{k+1}$, фазата се дефинира како

$$\phi_m(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}. \quad (7.5)$$

Ваквиот метод за детекција на фазата се користи при анализи на синхронизација и не е соодветен за ДБИ, бидејќи при линеарната интерполација се губи информацијата за промената на фазата за време на самиот циклус.

Во вториот метод, од мерниот сигнал $s(t)$ се одредува Хилберт трансформот $s_H(t)$, даден [112, 113] со равенката:

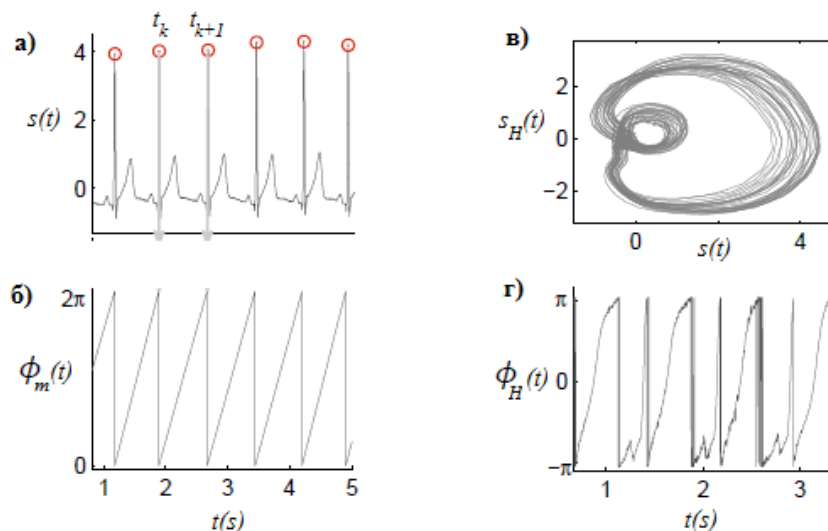
$$s_H(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{s(t+\tau) - s(t-\tau)}{\tau} d\tau. \quad (7.6)$$

Од ваквиот Хилбертов трансформ се конструира комплексен аналитички сигнал:

$$\zeta(t) = s(t) + is_H(t) = A(t)e^{i\phi_H(t)}, \quad (7.7)$$

каде што аголната променлива $\phi_H(t)$ во комплексниот сигнал $\zeta(t)$ е бараната моментна фаза [114]. Ваквиот пристап е независен од параметри и доколку сигналот е добро дефиниран и има спектар со мала ширина, се добива бараната фазна информација во секој момент од времето. Но, доколку дводимензионалната претстава на Хилбертовиот трансформ поседува јамки или пресечни точки, овој метод нема да даде задоволителни резултати. Всушност, ЕКГ сигналот е пример за еден ваков сигнал, поради комплексната форма, со присуството на помали врвови (пе и ку врвовите) помеѓу максималните ер врвови.

На сликата 7.3 е прикажано одредувањето на моменталната фаза од ЕКГ сигнал. На сликата 7.3 а) е прикажан ЕКГ сигналот и означени се настаните кои се користат за одредување на фазата по првиот метод. Добиената фаза е прикажана на сликата 7.3 б). На сликата 7.3 в) е прикажана дводимензионалната претстава на Хилбертовиот трансформ од истиот сигнал и на него јасно се гледа постоење на јамка, односно пресечни точки, што доведува до незадоволителна екстракција на фазата, што е прикажано на сликата 7.3 г).



Слика 7.3 – Одредување на моментална фаза од ЕКГ сигнал: а) ЕКГ сигнал со означени максимуми на ер врвот, б) фазата добиена според равенката 7.5 од дадениот сигнал, в) дводимензионална претстава на Хилбертовиот трансформ од сигналот, г) фазата реконструирана со помош на равенките 7.6 и 7.7.

Поради тоа во истражувањата кои ги проучуваат кардиореспираторните интеракции, фазите од респираторниот сигнал вообичаено се одредуваат со Хилберт трансформација, додека ЕКГ фазата се одредува по методот на означени настани [29, 114]. Ваквиот пристап дава добри резултати кога се разгледува динамичко поведение кое е подолго од неколку осцилаторни циклуси и каде што се доволни мал број на информации за фазата. Но, доколку се проучуваат осцилаторни динамики кои потекнуваат од комплексни сигнали, како што се функциите на спрега и сопствените временски променливи параметри на моделот, тогаш е неопходно моменталната фаза да содржи што повеќе информации од циклусот. При екстракција на фазата од ЕКГ сигналот според методот на означени настани, за секој циклус има само една информација која навистина е дел од циклусот, а останатите се интерполирани вредности. Од друга страна, видовме дека и методот со Хилбертова трансформација не дава задоволителни резултати. Дополнително мора да се внимава кога сигналот содржи делови и модуляции од други осцилаторни процеси. Во такви случаи е неопходно претпроцесирање, во форма на детрендирање, филтрирање или декомпозиција на сигналите. Тоа ќе овозможи заемнодејствата да бидат проучувани на ниво на самоодржливи осцилаторни процеси, со нивната сопствена фреквенција. Таков е примерот при проучување на кардиореспираторната активност, каде што респираторниот сигнал може да содржи компоненти од срцевата работа, па доколку не се земени во предвид овие компоненти, истражувањето несоодветно да се сведе на проучување на заемнодејството помеѓу срцето и влијанието од срцето на дишењето. Ваквото проучување е несоодветно, бидејќи овие компоненти се артефакти од мерењето, а не последица на осцилаторната динамика на респирацијата, па динамиките чие

заемнодејство се проучува во таков случај се всушност последица на еден и ист осцилатор, срцето.

Кралеман со соработниците [87] предлага метод во кој фазите, одредени од измерените скаларни временски серии по еден од двата претходни методи, се сметаат за појдовна точка за одредување на фазите на осцилаторните системи кои заемнодејствуваат. Фазите добиени по еден од претходните методи се нарекуваат протофази и се означени со променливата θ . За да се одреди фазата ϕ од протофазата θ , потребно е протофазата монотонно да расте во тек на секој еден осцилаторен циклус. Но, за протофазата одредена преку Хилбертовата трансформација тоа не секогаш е исполнето. На пример, барањето за монотоност не е исполнето кога траекторијата има пресечни точки, како онаа прикажана на сликата 7.3 в). Во таков случај, методот на Кралеман ја обезбедува монотоноста на протофазата на следниот начин. На траекторијата, моментите кога таа се пресекува се означуваат со ознаките t_i . Потоа, се одредува должината $L(t_i)$ долж траекторијата почнувајќи од првиот пресек, за конечно протофазата да се дефинира како:

$$\theta(t) = 2\pi \frac{L(t) - L(t_i)}{L(t_{i+1}) - L(t_i)} + 2\pi i, \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (7.8)$$

Ваквата определба на протофазата може да се смета за обопштување на методот на означени настани.

По одредување на протофазата $\theta(t)$, доколку станува збор за осцилатор на граничен циклус во отсуство на шум, фазата може да се одреди преку трансформацијата:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \quad (7.9)$$

од каде што со користење на трансформацијата:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\omega_0}{\frac{d\theta}{dt}(\theta)} = \omega_0 \frac{dt}{d\theta}(\theta), \quad (7.10)$$

се добива:

$$\phi = \omega_0 \int_0^\theta \frac{d}{d\theta}(\theta') d\theta'. \quad (7.11)$$

Во присуство на шум, траекторијата не се повторува, но за мали пертурбации може да се смета дека е блиска до непертурбираната. Во таков случај трансформацијата $\theta \rightarrow \phi$ може да се спроведе на средната вредност, при доволно долга осцилаторна временска серија. За временски интервал T , осцилаторната фреквенција може да се пресмета како

$$\omega_0 = \frac{\theta(t) - \theta(0)}{T}, \quad (7.12)$$

додека равенката 7.10 ќе се усредни како:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \omega_0 \left\langle \frac{dt}{d\theta}(\theta) \right\rangle_\theta = \sigma(\theta), \quad (7.13)$$

каде што во средната вредност $\langle \dots \rangle$ се усреднува по сите осцилаторни циклуси.

Функцијата $(2\pi)^{-1}\sigma(\theta)$ е всушност густината на распределба на веројатноста на θ , бидејќи е обратно пропорционална на брзината на точката долж траекторијата.

Со развивање на $\sigma(\theta)$ во Фуриеова серија се добива:

$$\sigma(\theta) = \sum_n S_n e^{in\theta}, \quad (7.14)$$

каде што коефициентите се

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (7.15)$$

При разгледување на временска серија од N_p точки $\theta(t_j)$, семплирани со временски чекор T/N_p , каде што времето $t_j = jTN_p^{-1}$, со замена на интегрирањето со сумирање се добива:

$$S_n = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} e^{-in\theta(t_j)}. \quad (7.16)$$

Со користење на равенките 7.12 и 7.14 се добива потребната трансформација на протофазата во фаза:

$$\phi = \int_0^\theta \sigma(\theta') d\theta' = \sum_n S_n \int_0^\theta e^{-in\theta'} d\theta' = \theta + \sum_{n \neq 0} \frac{S_n}{in} (e^{in\theta} - 1). \quad (7.17)$$

Вака дефинираната трансформација од протофаза во фаза дава добра апроксимација во присуство на шум, при што во фазата која линеарно расте се елиминирани сите 2π периодични неуниформности од протофазата и отстапувањата на $\phi(t)$ од строг линеарен раст потекнуваат само од реалните надворешни влијанија или од флукуациите на параметрите на испитуваниот динамички систем. Вака изведената трансформација, Кралеман [87] ја обопштува и на систем од спрегнати осцилатори со воведување на дополнителна претпоставка дека членовите кои ја опишуваат спрегата меѓу двата осцилатора се периодично зависни од фазата, односно важи:

$$\int_0^{2\pi} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) d\phi_2 = \int_0^{2\pi} q^{(2)}(\phi_2, \phi_1) d\phi_1 = 0, \quad (7.18)$$

каде што величините $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ се функциите на спрега.

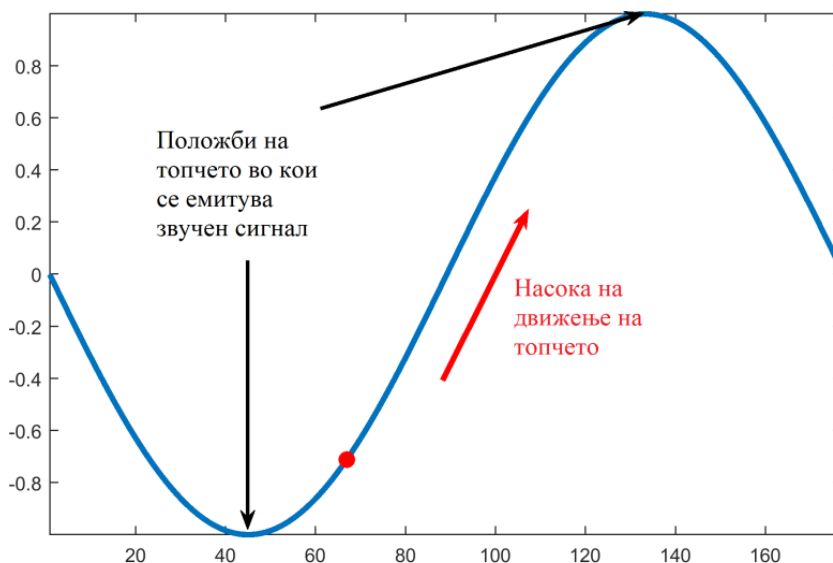
7.3 Мерења, субјекти и сигнали

Фокусот на ова истражување е на кардиореспираторниот систем кој вклучува осцилации од повеќе извори како што се: контракциите на срцето (~ 1 Hz), дишењето ($\sim 0,25$ Hz), Мејеровите бранови во артерискиот крвен притисок ($\sim 0,1$ Hz), терморегулаторската активност ($\sim 0,05$ Hz) и други [59]. Овие осцилации меѓусебно заемнодејствуваат, што доведува до варијабилност на пулсот и на други кардиоваскуларни величини, варијабилност на дишењето итн. Познато е дека срцевата работа е силно поврзана со респирацијата. И респираторниот и кардиоваскуларниот систем се регулирани од автономниот нервен систем во форма на спрегнат контролен систем на повратна врска [115]. Затоа, внатрешни или надворешни пертурбации во било кој од двата система ќе имаат влијание на другиот систем. На пример, варијабилноста на пулсот е интензивно проучувана и утврдено е дека некои типови аритмии имаат позитивно влијание на здравјето и може да се користат како индекс за здраво срце. Таков пример е респираторната синусна аритмија (РСА), која е еден од најпроучуваните механизми на кардиореспираторното заемнодејство. Се состои од зголемување на пулсот при вдишување и негово намалување при издишување. Утврдено е дека е најизразена кај млади индивидуи и се намалува со процесот на стареење [104] и може да биде зголемена со физички вежби [105] или засилена со длабоко, бавно дишење. Проучувањето на кардиореспираторните интеракции може да придонесе за превенција, дијагноза и третман на болести на кардиоваскуларниот, респираторниот и автономниот нервен систем.

Двата системи од интерес покажуваат периодично поведење и се временски променливи по природа, поради што се погодни за апроксимација со нивната фазна динамика [3, 74]. Овие два аспекта на кардиореспираторната динамика, ја прави погодна за анализа со помош на протоколот за АДБИ, кој може да се искористи за евалуација на мерките на заемнодејство како што се синхронизацијата, насоченоста и функциите на спрега.

Со цел апликација на протоколот на вистински биолошки податоци, спроведени се кардиореспираторни мерења на субјект од машки пол, на возраст од 35 години, непушач, без познати кардиоваскуларни здравствени тегоби. Истражувањето е одобрено од Етичкиот комитет при Медицинскиот факултет, универзитет Св. „Кирил и Методиј“ во Скопје и е обезбедена писмена согласност на субјектот за учество во судијата. Дишењето се одвива по предодредена респираторна шема на тој начин што субјектот следи визуелна

и аудио компјутерска симулација во која топче се движи по синусна линија на компјутерскиот екран (слика 7.4).



Слика 7.4 – Компјутерска симулација која ја следи субјектот со цел дишење по предодредена респираторна шема.

Фреквенцијата на движење на топчето, заедно со синусната линија, се менува според законот кој сакаме да го следи респирацијата. Кога топчето ја достигнува најниската и највисоката позиција на екранот, се генерира краток звучен сигнал. При движењето на топчето по линијата нагоре, субјектот зема воздух, додека при движење на топчето по линијата надолу, субјектот го испушта воздухот.

Мерењата се спроведени со користење на „Віорас“ опрема со субјектот во лежечка положба на грб. Респирацијата е мерена со еластичен појас поставен на градите на субјектот, како што е прикажано на сликата 7.5 а). Со помош на еластичниот појас се мерат промените на обемот на градите при дишењето и се претвораат во електричен сигнал кој е проследен до контролната единица на мерната опрема. Срцевата работа се следи со помош на ЕКГ сонда со три електроди, прикажана на слика 7.5 б). Моменталната кардио фаза се проценува од ЕКГ сигналот, а респираторната фаза се добива од респираторниот сигнал.



Слика 7.5 – Приказ на позиционирањето на мерните сонди на Биопак опремата: а) појас за респирација поставен на градите на субјект, б) ЕКГ со три електрода.

Во студијата се истражуваат три различни шеми на дишење: спонтано слободно дишење, временски променливо дишење, при кое фреквенцијата на дишење се менува по синусен закон и временски променлива респирација, при која фреквенцијата на дишење се менува по апериодичен закон.

По спроведување на мерењата и визуелната проверка на добиените сигнали, најпрво се спроведува вејвлет анализа за да се провери далии респирацијата на субјектот ги следела посакуваните шеми на промена на респираторната фреквенција. Потоа се спроведува процедура за екстракција на фазата. Со цел робусна екстракција на фазата, осцилаторните интервали се проценети со стандардна процедура за дигитално филтрирање, која вклучува ФИР филтер по што се користи процедура на филтрирање на нулта фаза („filtfilt“) за да се обезбеди дека со филтрирањето не се воведуваат временски или фазни задоцнувања. Границите на интервалот за респираторниот сигнал се со вредности од 0,146 Hz до 0,6 Hz, додека ЕКГ сигналот има вредности од 0,6 Hz до 2 Hz [29, 44, 87]. Фазите на филтрираните сигнали беа проценети со користење на Хилбертова трансформација како резултат на што се добиваат протофазите. На така добиените протофази потоа се применува трансформацијата на Кралеман [87] за добивање на независните фази.

По добивањето на фазите се применува протоколот за аДБИ со цел добивање на функциите на спрега кои го карактеризираат заемнодејството меѓу респирацијата и срцевата работа. Од претходните истражувања во литературата е утврдено дека доминантно влијание при проучување на кардиореспираторната спрега е влијанието на респирацијата врз срцевата работа, па затоа при прикажувањето на добиените функции на спрега, главен акцент е ставен на оваа насока на заемнодејството.

7.4 Резултати и дискусија

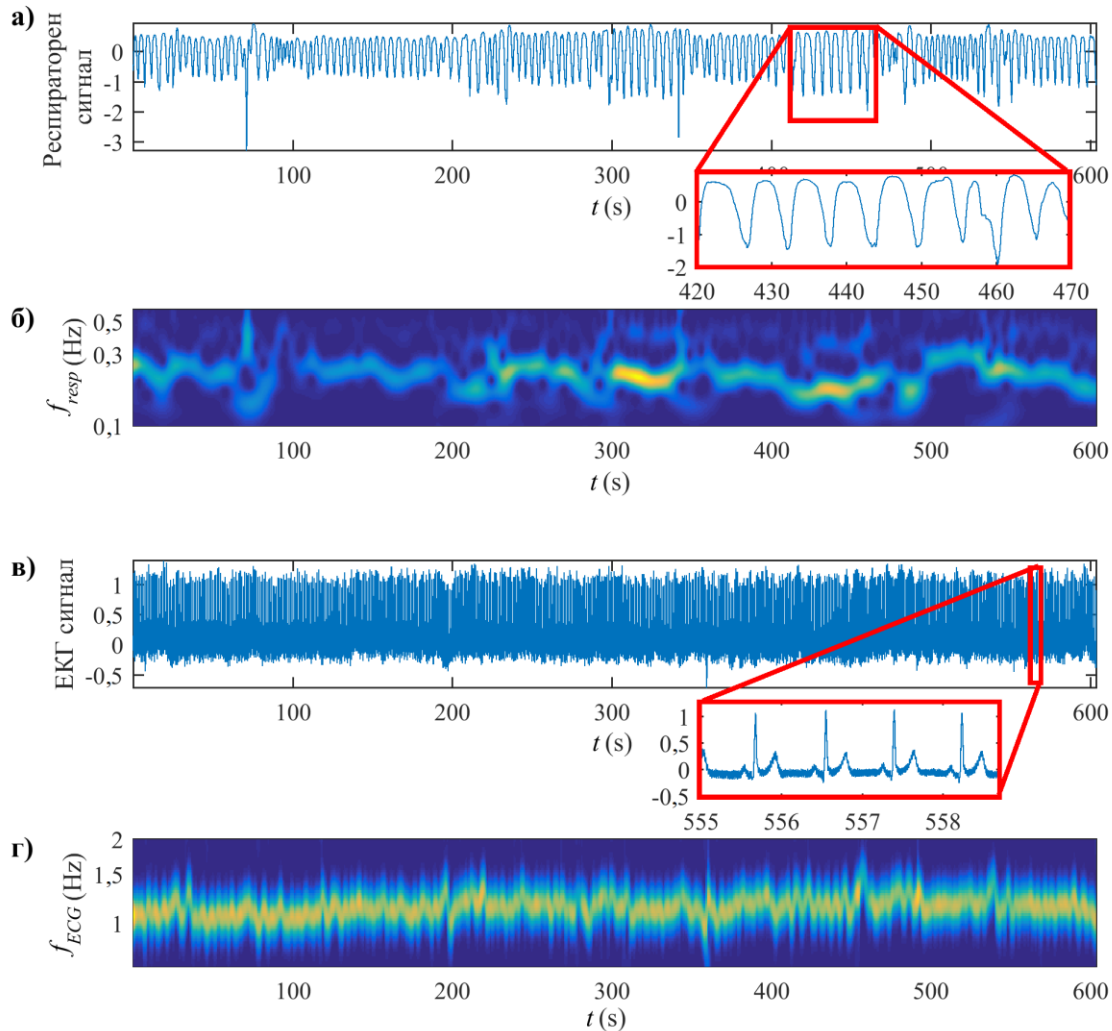
Како што веќе напоменавме, во студијата се разгледуваат три различни шеми на респирација: спонтано слободно дишење, временски променливо дишење, при кое фреквенцијата на дишење се менува по синусен закон и временски променлива респирација, при која фреквенцијата на дишење се менува по апериодичен закон. Средните респираторни фреквенции на истражуваните шеми имаат вредност 0,245 Hz при спонтаното слободно дишење, 0,258 Hz при респирацијата по синусен закон и 0,283 Hz при респирацијата по апериодичен закон. Соодветните средни вредности за срцевиот пулс се 68,3, 69,0 и 77,4 отчукувања во минута.

7.4.1 Спонтано слободно дишење

На сликата 7.6 е даден графички приказ на мерните резултати при кардиореспираторните мерења за спонтано слободно дишење

Респираторниот сигнал е прикажан на слика 7.6 а), додека вејвлет трансформот на респираторниот сигнал е даден на слика 7.6 б). Од вејвлет трансформот се гледа дека респираторната фреквенција се менува во интервалот од 0,15 до 0,3 Hz и соодветствува на средна вредност од приближно 0,25 Hz. На слика 7.6 в) е прикажан ЕКГ сигналот при спонтано дишење, додека на слика 7.6 г) е прикажан вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот. Времетраењето на мерењето во случајот на спонтана респирација има вредност од околу 10 минути.

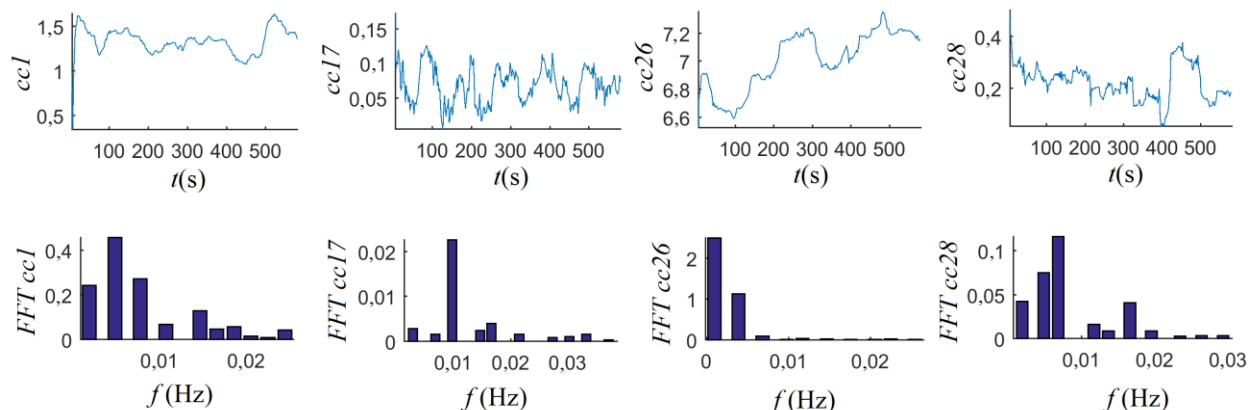
По спроведување на процесот на екстракција на фазите, согласно протоколот за АДБИ, спроведена е иницијалната инференција. За временскиот прозорец користена е иницијална вредност од $t_w = 2$ s, додека за параметарот на пренесување користена е вредноста од протоколот од $p_w = 0,2$.



Слика 7.6 – Кардиореспирагорна интеракција при спонтано дишење: а) респираторниот сигнал, б) вејвлет трансформот на респираторниот сигнал, в) ЕКГ сигналот, г) вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот.

Во случај на слободно дишење, како што е прикажано на сл.7.6 б), не се набљудуваат периодични промени на фреквенцијата со времето. Затоа, при спроведувањето на иницијалната инференција, на дијаграмот со столпчиња од брзата Фурие трансформација се појавуваат повисоки фреквенции.

На слика 7.7 се дадени четирите најзначајни инферирани параметри од иницијалната инференција, заедно со соодветните резултати од брзата Фурие трансформација. Сите педесет инферирани параметри и соодветните резултати од брзата Фурие трансформација, за случајот на спонтано дишење, се дадени на сликите А.1 и А.2 од Прилогот 1.



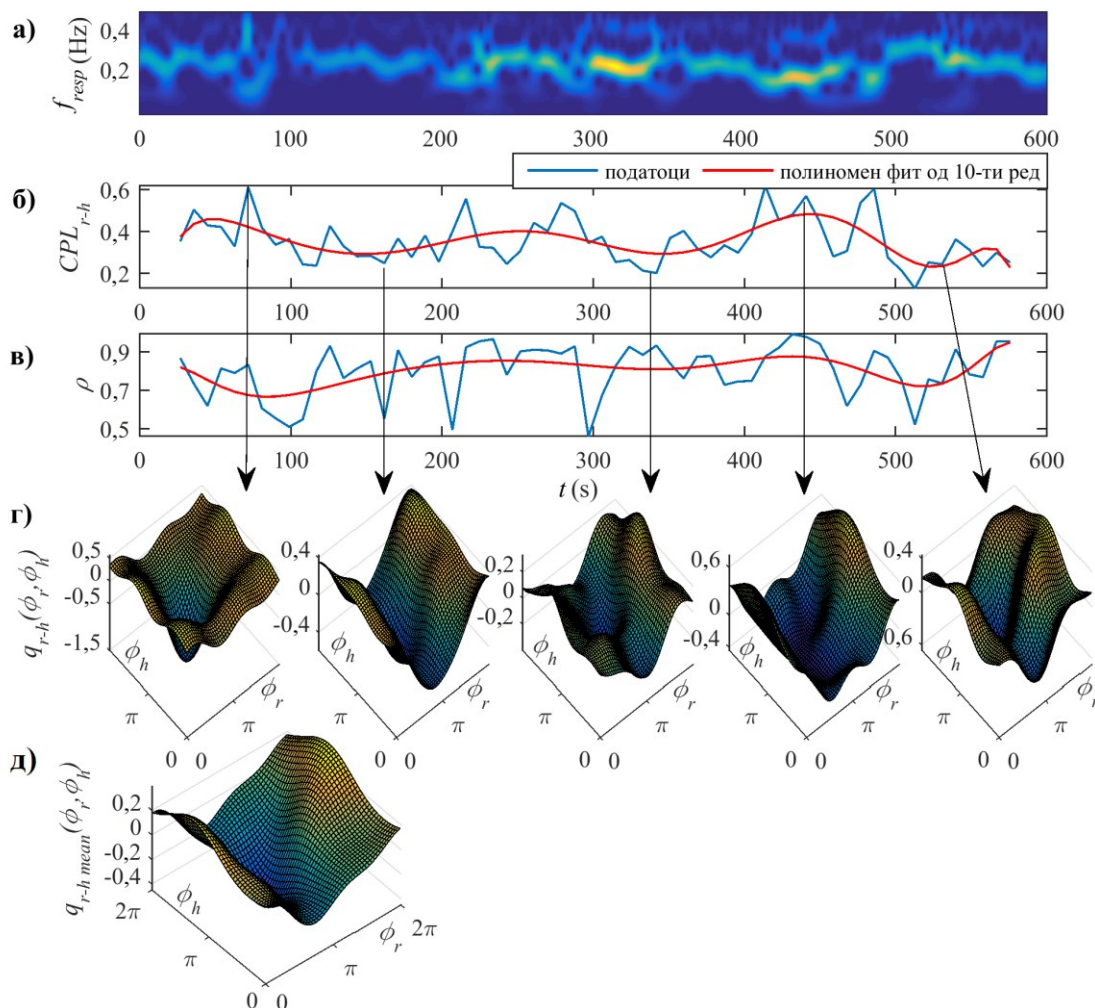
Слика 7.7 – Иницијалната инференција за случај на спонтано слободно дишење. На горните слики се прикажани најзначајните параметри, додека на долните се нивните соодветни брзи Фурие трансформации.

За вклучување на високите фреквенции во анализата, по евалуирањето на сите инферирани параметри и соодветните брзи Фурие трансформации од иницијалната инференција, земено е дека фреквенцијата на најбрзата промена има вредност $f_{max} = 0,015$ Hz. Таа соодветствува на оптимален временски прозорец со вредност $t_{w,opt} = 9$ s, кој се користи во понатамошната инференција. Согласно протоколот за аДБИ, за ваков временски прозорец, оптималниот параметар на пренесување има вредност $p_{w,opt} = 0,22$. Ваквата мала вредност за временскиот прозорец доведува до зголемена коваријансна матрица, но истовремено и до вклучување на побрзите временски промени во инференцијата, што овозможува подобро следење на временската еволуција на параметрите и на функциите на спрега.

По одредување на оптималните вредности за временскиот прозорец и параметарот на пренесување, се продолжува со инференцијата на параметрите на моделот c_i , а од нив и со пресметка на параметрите и карактеристиките на функциите на спрега. Функциите на спрега се евалуирани на $2\pi \times 2\pi$ решетка со користење на релевантните базни функции т.е. Фуриеови компоненти скалирани со соодветните инферирани параметри на спреги. За секоја спрега се пресметани јачините на спрегите CPL_i , како Евклидова норма од инферираните параметри. Пресметан е и индексот на сличност на функциите на спрега ρ , кој ја квантификува сличноста на формата на две функции на спрега независно од нивните амплитуди на јачината на спрегата. Индексот на сличност е уникатна мерка за функциите на спрега и е пресметан како корелационен индекс помеѓу векторите $\vec{c}_i$ на две функции на спрега [27, 32]. Значајно е да се нагласи дека јачината на спрегата и индексот на сличност претставуваат две различни димензии на функцијата на спрега [43], што е подетално обработено во третата глава од оваа теза. Во анализите е одреден индексот на сличност помеѓу временски усреднетата функција на спрега и секоја индивидуална функција на спрега инферирана во одреден временски момент кој одговара на средината на временскиот блок на инференција. На ваков начин се добива временската променливост

на формата на функцијата на спрега споредена со усреднетата функција на спрега за целокупната временска серија мерења.

На слика 7.8 се прикажани добиените резултати за функциите на спрега кои го опишуваат влијанието на слободното спонтано дишење врз срцевата работа прикажана преку ЕКГ мерењата.



Слика 7.8 – Резултати за влијанието на спонтано слободно дишење врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличност на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за целата временска серија.

На слика 7.8 а) е прикажан вејвлет трансформот на респираторниот сигнал за овој случај, кој ја претставува промената на респираторната фреквенција со текот на времето. На сликите 7.8 б) и в) со сина линија се прикажани резултатите од реконструираниите величини, додека со црвена линија е претставен полиномен фит на резултатите, со полином од десетти ред. Притоа, на слика 7.8 б) е прикажана временската промена на

јачината на спрегата, додека на сликата 7.8 в) е прикажана промената на сличноста на функциите на спрега со текот на времето. На слика 7.8 г) се прикажани функциите на спрега во одредени временски точки, додека на слика 7.8 д) е дадена средната функција на спрега, усреднетата по целокупната временска серија.

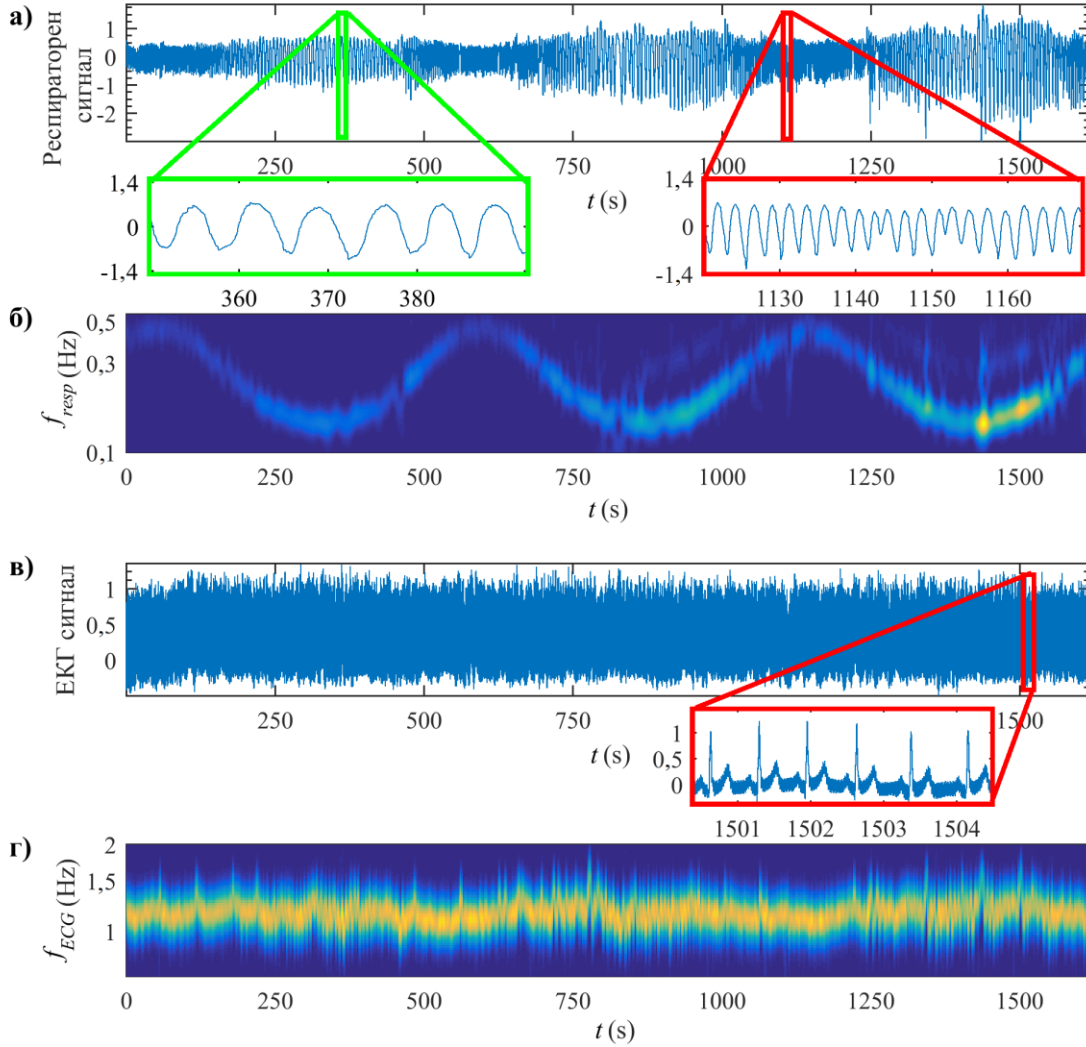
Иако се набљудуваат извесни флукутации, резултатите покажуваат дека при слободно спонтано дишење јачините на функциите на спрегата имаат прилично стабилни вредности. Иако се набљудуваат извесни промени во формата на функциите на спрега, тие не се многу големи, поради што и вредностите на индексот на сличност се големи.

7.4.2 Временски променлива респирација по хармониски закон

На сликата 7.9 е даден графички приказ на мерните резултати при кардиореспираторните мерења за временски променливо дишење кое следи синусен закон. Фреквенцијата на дишењето се менува според законот $f = 0,3 + 0,2 \sin(2\pi t/560)$. Респираторниот сигнал е прикажан на слика 7.9 а), додека вејвлет трансформот на респираторниот сигнал е даден на слика 7.9 б). Преку вејвлет трансформот нагледно е прикажана промената на респираторната фреквенција со текот на времето. На слика 7.9 в) е прикажан ЕКГ сигналот при респирацијата по синусен закон, додека на слика 7.9 г) е прикажан вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот. Времетраењето на мерењето во случај на периодична контролирана респирација има вредност од околу 30 минути.

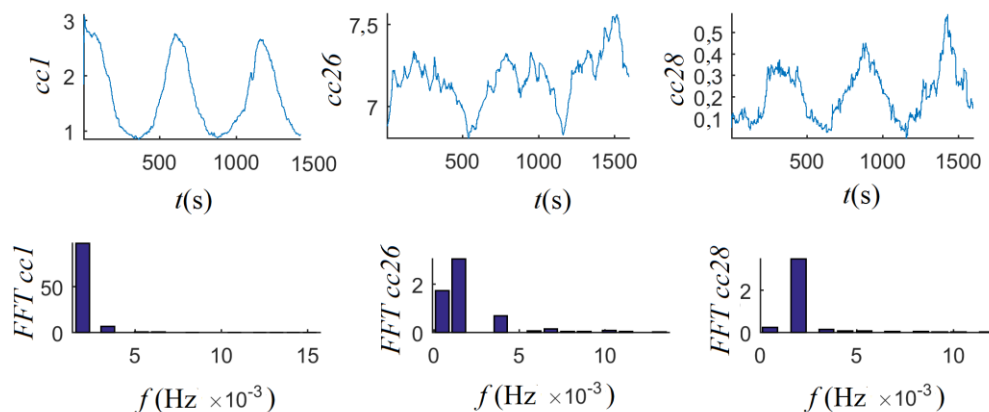
По спроведување на процесот на екстракција на фазите, согласно протоколот за АДБИ, спроведена е иницијалната инференција. За временскиот прозорец е користена иницијална вредност од $t_w = 2 s$, додека за параметарот на пренесување користена е вообичаената вредност од $p_w = 0,2$.

Во случај на временски променлива респирација по хармониски закон, како што е прикажано на слика 7.9 б), фреквенцијата се менува периодично со текот на времето. Поради тоа, при спроведувањето на иницијалната инференција, на дијаграмот со столпчиња од брзата Фурие трансформација, кај параметрите кои ја опишуваат респирацијата (ссл до ссл25) доминира фреквенцијата на респирацијата. Ова е прикажано на сликата 7.10, каде што се дадени трите најзначајни инферирани параметри од иницијалната инференција, заедно со соодветните резултати од брзата Фурие трансформација. Сите педесет инферирани параметри при иницијалната инференција за случајот на респирација по хармониски закон се дадени на сликата А.3 од Прилогот 1, додека соодветните резултати од брзата Фурие трансформација се дадени на сликата А.4 од истиот прилог.



Слика 7.9 – Кардиореспираторна интеракција при временски променлива респирација која следи синусен закон: а) респираторниот сигнал, б) вејвлет трансформот на респираторниот сигнал, в) ЕКГ сигналот, г) вејвлет трансформот на ЕКГ сигналот.

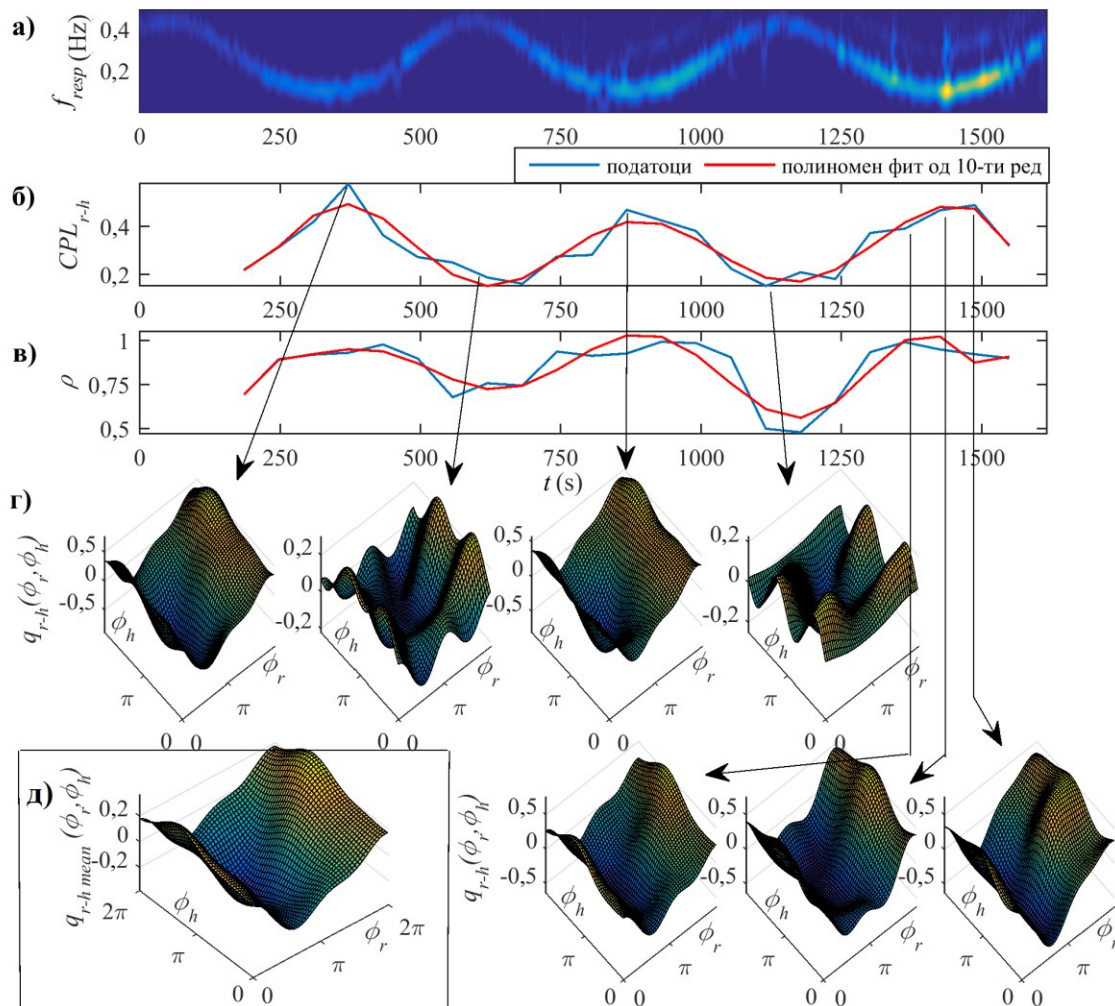
Со евалуирање на сите инферирани параметри и соодветните брзи Фурие трансформации од иницијалната инференција, се покажува дека фреквенцијата на најбрзата промена од интерес има вредност $f_{max} = 0,002$ Hz што е доста блиско до фреквенцијата на временските промени на респирацијата, која има вредност $f_{resp} = 0,0018$ Hz. Доминацијата на една фреквенција во иницијалната инференција доведува до повисок оптимален временски прозорец ($t_{w,opt} = 62$ s) и до втора инференција со редуцирана коваријансна матрица. Согласно протоколот за аДБИ, за ваков временски прозорец, оптималниот параметар на пренесување има вредност $p_{w,opt} = 0,1$.



Слика 7.10 – Иницијалната инференција за случај на контролирана респирација по хармониски закон. На горните слики се прикажани најзначајните параметри, додека на долните се нивните соодветни брзи Фурие трансформации.

И во овој случај, по одредувањето на оптималните вредности за временскиот прозорец и параметарот на пренесување, се спроведува втора инференција на параметрите на моделот c_i , а потоа и на функциите на спрега. Функциите на спрега се повторно евалуирани на $2\pi \times 2\pi$ решетка со користење на релевантните базни функции т.е. Фуриеови компоненти скалирани со соодветните инферирани параметри на спрегите. За секоја спрега се пресметани јачините на спрегите CPL_i и индексот на сличност на функциите на спрега ρ . Повторно е евалуирана сличноста помеѓу временски усреднетата функција на спрега и секоја индивидуална функција на спрега инферирана во одреден временски момент, со што е добиена временската променливост на формата на функцијата на спрега споредена со усреднетата функција на спрега за целокупната временска серија мерења.

На слика 7.11 се прикажани добиените резултати за функциите на спрега кои го опишуваат влијанието на периодично променливата респирација по синусен закон врз срцевата работа прикажана преку ЕКГ мерењата. На слика 7.11 а) е прикажан вејвлет трансформот на респираторниот сигнал за овој случај, односно промената на респираторната фреквенција со текот на времето. На сликите 7.11 б) и в) се прикажани резултатите од реконструираниите величини со сина линија, додека со црвена линија е даден полиномен фит на резултатите со полином од десетти ред. Притоа, на слика 7.11 б) е прикажана временската промена на јачината на спрегата, на сликата 7.11 в) е прикажана промената на сличноста на функциите на спрега со текот на времето. На слика 7.11 г) се прикажани функциите на спрега во одредени временски точки кои соодветствуваат на максималните и минималните фреквенции на респирација. Во долниот дел е прикажана и временската еволуција на функцијата на спрега во околина на минималната фреквенција на респирација. Конечно, на слика 7.11 д) е дадена средната функција на спрега, усреднета по целокупната временска серија.



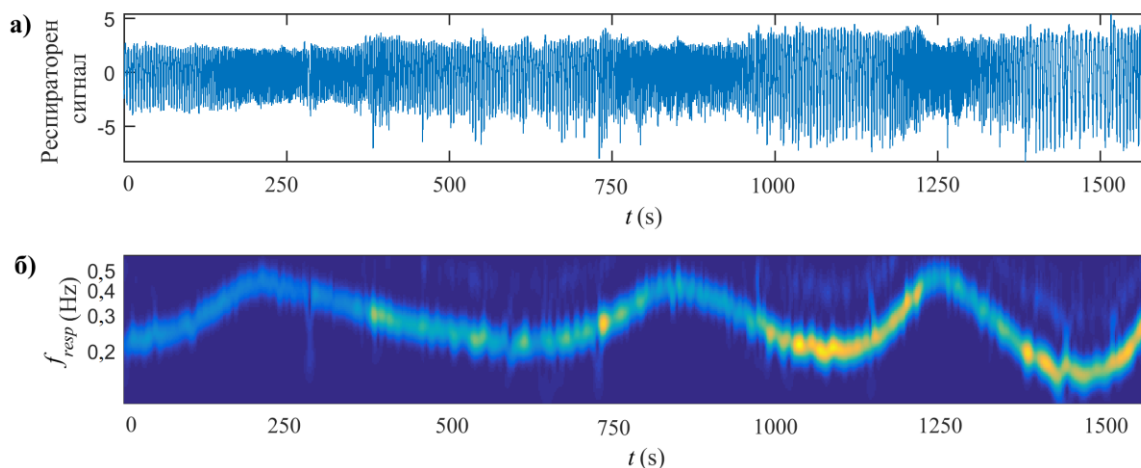
Слика 7.11 – Резултати за влијанието на периодичната респирација по хармониски закон врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличноста на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за временската серија.

Од сликата 7.11 се гледа дека испитуваните карактеристики на спрегата, јачината и индексот на сличност, се менуваат периодично со текот на времето, на сличен начин како и фреквенцијата на респирацијата. Притоа, нивните промени се инверзни во однос на респирацијата, па минимумите на двете испитувани карактеристики приближно се совпаѓаат со максимумите на фреквенцијата на респирацијата и обратно. Добиениот резултат дека максимумот на јачината на спрегата се добива при минимални фреквенции на респирација го потврдува резултатот кој е претходно објавен [30, 60] дека јачината на кардиореспираторната спрега е поголема при побавно дишење. Формата на функцијата на спрега се менува со текот на времето, што доведува до тоа индексот на сличност да се менува повеќе со текот на времето, во споредба со случајот на спонтанa респирација. Ова укажува на тоа дека кардиореспираторниот механизам опишан со оваа функција на спрега е временски променлив и ја следи индуцираната детерминистичка пертурбација на

дишењето. Поголема сличност се добива за помали респираторни фреквенции, односно побавно дишење. Исто така, од сликата може да се види и дека при мали фреквенции на респирација, формата на функцијата на спрега се менува главно долж респираторната оска и е релативно константна долж оската на кардио фазата. Ова укажува дека спрегата е главно одредена од директното влијани на дишењето врз срцевата работа.

7.4.3 Апериодично дишење

На сликата 7.12 се прикажани респираторниот сигнал при респирација која следи апериодично поведење и соодветниот вејвлет трансформ. Времетраењето на мерењето во случајот на апериодична контролирана респирација има вредност од околу 30 минути, додека користениот апериодичен закон кој го следи респирацијата на субјектот е z – компонентата на хаотичен Лоренцов систем [116]. Изгледот на ЕКГ сигналот и неговиот вејвлет трансформ е сличен на оној од сликите 7.9 в) и г) и тука не е претставен.

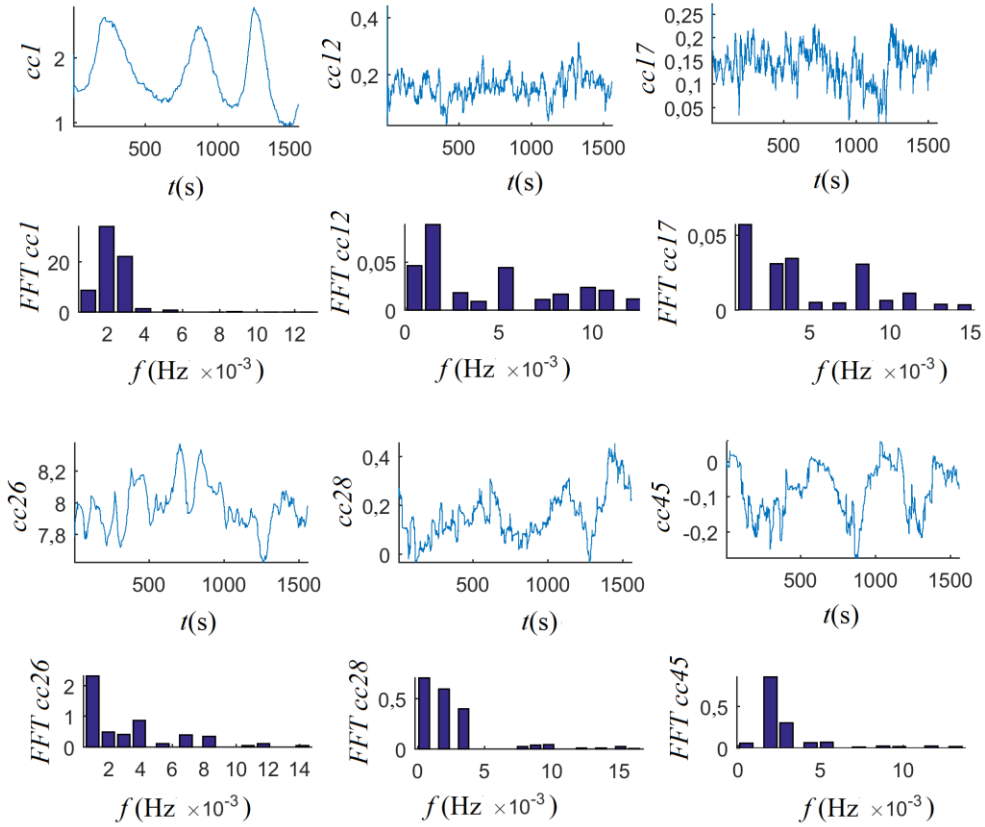


Слика 7.12 – Временски променливата природа на респираторните мерења при апериодичното дишење: а) респираторниот сигнал при контролирано дишење чија фреквенција следи апериодичен закон, б) вејвлет трансформот при апериодично дишење.

По спроведување на процесот на екстракција на фазите, согласно протоколот за аДБИ, спроведена е иницијалната инференција. За временскиот прозорец е користена иницијална вредност од $t_w = 2$ s, додека за параметарот на пренесување $p_w = 0,2$.

Во случај на временски променлива респирација по апериодичен закон, како што е прикажано на слика 7.12 б), фреквенцијата се менува апериодично со текот на времето, што значи дека се присутни повеќе основни хармоници. Поради тоа, во овој случај има повеќе параметри на моделот кои даваат свој придонес во динамиката на системот.

На слика 7.13 се прикажани шесте најзначајни параметри инферирани при иницијалната инференција, заедно со соодветните резултати од брзата Фурие трансформација.



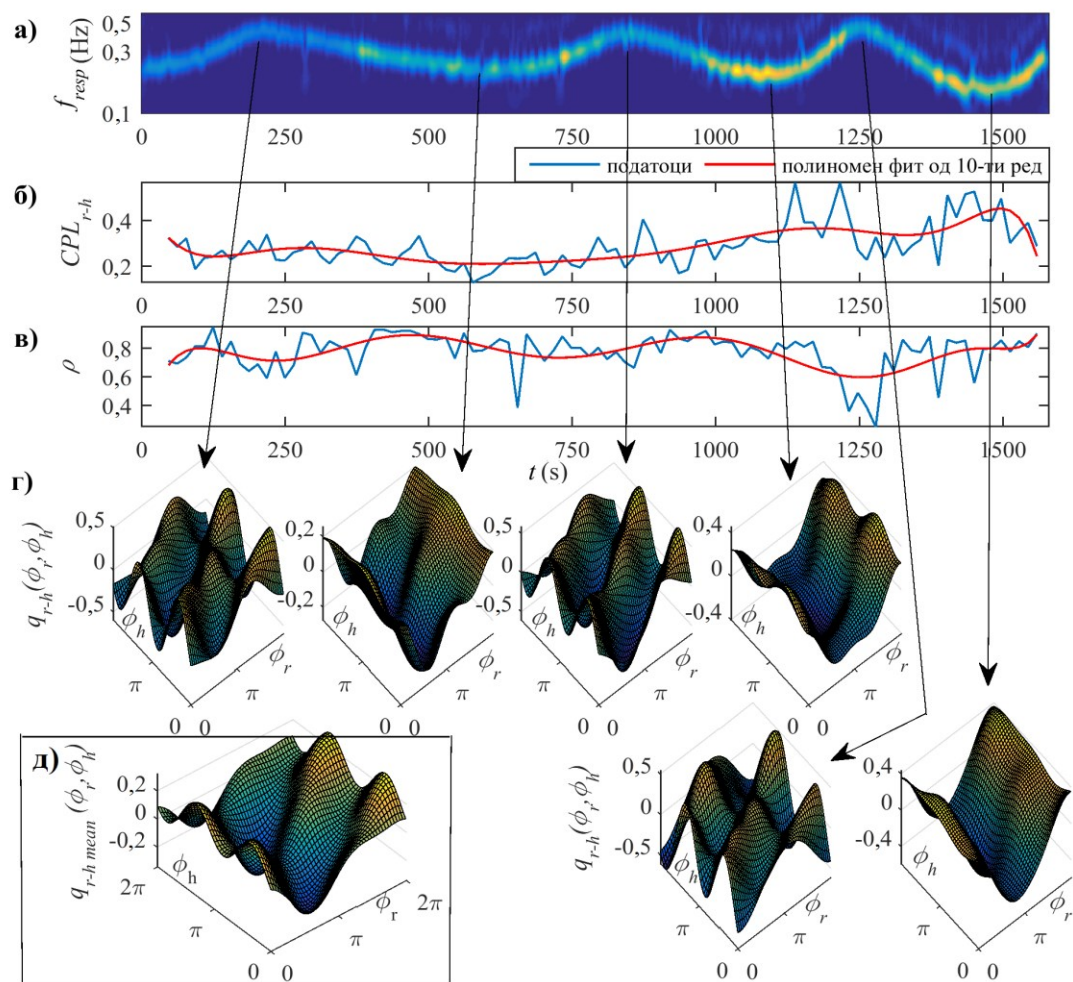
Слика 7.13 – Иницијалната инференција за случај на контролирана респирација по апериодичен закон. На сликите се прикажани најзначајните параметри и нивните соодветни брзи Фурие трансформации.

Сите педесет инферирани параметри при иницијалната инференција за случајот на респирација по апериодичен закон се дадени на сликата А.5 од Прилогот 1, додека соодветните резултати од брзата Фурие трансформација се дадени на сликата А.6 од истиот прилог.

Со евалуирање на сите инферирани параметри и соодветните брзи Фурие трансформации од иницијалната инференција, се добива дека фреквенцијата на најбрзата промена од интерес има вредност $f_{max} = 0,008$ Hz, што доведува до оптимален временски прозорец со вредност $t_{w,opt} = 15,6$ s, кој овозможува вклучување на различните фреквенции на промена на параметрите по цена на зголемена коваријансна матрица. Согласно протоколот за АДБИ, за ваков временски прозорец, оптималната вредност на параметарот на пренесување има вредност $p_{w,opt} = 0,2$.

По одредувањето на оптималните вредности за временскиот прозорец и параметарот на пренесување, се спроведува втора инференција на параметрите на моделот c_i , а потоа и на функциите на спрега. Функциите на спрега се евалуирани на $2\pi \times 2\pi$ решетка, со користење на релевантните базни функции. За секоја спрега се пресметани јачините на спрегите CPL_i и индексот на сличност на функциите на спрега ρ . Повторно е евалуирана сличноста помеѓу временски усреднетата функција на спрега и секоја индивидуална функција на спрега инферирана во одреден временски момент, со што е добиена временската променливост на формата на функцијата на спрега споредена со усреднетата функција на спрега за целокупната временска серија мерења.

На слика 7.14 се прикажани добиените резултати за функциите на спрега кои го опишуваат влијанието на аperiодичната респирација врз срцевата работа прикажана преку ЕКГ мерењата.



Слика 7.14 – Резултати за влијанието на аperiодичната респирација врз ЕКГ. Прикажани се временските промени на: а) фреквенцијата на респирацијата; б) јачината на спрега; в) сличноста на функциите на спрега; г) функциите на спрега во различни моменти од времето; д) средната функција на спрега за временската серија.

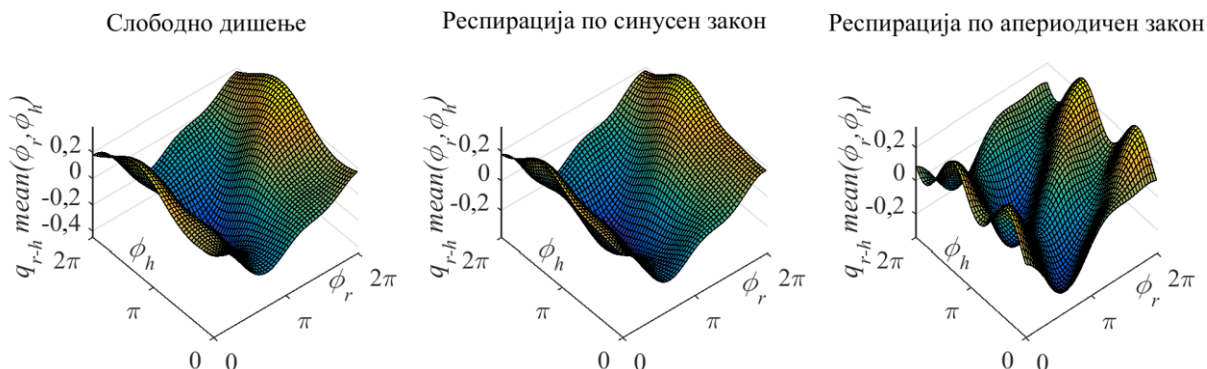
На слика 7.14 а) е прикажан вејвлет трансформот на респираторниот сигнал при апериодичната респирација, а со тоа и промената на респираторната фреквенција со текот на времето. На сликите 7.14 б) и в) со сина линија се прикажани резултатите од реконструираниите величини, додека со црвена линија се дадени полиномните фитовања на резултатите, со полином од десетти ред. Притоа, на слика 7.14 б) е прикажана временската промена на јачината на спрегата, додека на 7.14 в) е дадена промената на сличноста на функциите на спрега со текот на времето. На слика 7.14 г) се прикажани функциите на спрега во одредени временски точки кои соодветствуваат на максималните и минималните фреквенции на респирација. Конечно, на слика 7.14 д) е дадена средната функција на спрега, усреднета по целокупната временска серија.

Од сликата 7.14 се гледа дека јачината на спрегата и индексот на сличност се временски променливи. Максимумите на кривите на временска зависност се повторно во близина на минимумите на респираторната фреквенција, но во овој случај тоа не е така јасно изразено како во случајот на респирација по синусен закон. Формата на функцијата на спрега се менува со текот на времето, поради што и индексот на сличност се менува повеќе со текот на времето, споредено со случајот на спонтанa респирација. И во овој случај, при побавно дишење, формата на функцијата на спрега се менува повеќе долж респираторната оска, а помалку долж оската на кардио фазата, иако и долж кардио оската промените се поголеми во однос на случајот со синусна респирација, што се манифестира и во усреднетата функција на спрега. Тоа укажува дека и во овој случај, спрегата е главно одредена од директното влијани на дишењето врз срцевата работа, но и обратното влијание е присутно.

7.5 Дискусија на добиените резултати

На слика 7.15 се прикажани временски усреднетите функции на спрега за сите три разгледувани случаи. Квалитативно, формите на сите три функции се слични, при што случајот на апериодична респирација покажува поголеми отстапување во споредба со другите два случаи. Од погоре прикажаните резултати може да се заклучи дека реконструираниите кардиореспираторни функции на спрега се опишани со сложени функции чија форма квантитативно се менува со времето и со промената на фреквенцијата на респирацијата. Ова укажува дека заемнодејствата во кардиореспираторниот систем се и самите временски променливи процеси.

Формата на функциите на спрега покажува дека за респираторни фази помеѓу $3\pi/2$ и $\pi/2$, функциите на спрега имаат позитивна вредности и притоа респирацијата ги забрзува срцевите осцилации, додека за респираторни фази помеѓу $\pi/2$ и $3\pi/2$, респирацијата ги забавува срцевите осцилации. На таков начин функциите на спрега го опишуваат механизмот на кардиореспираторните заемнодејства.



Слика 7.15 – Усреднетите функции на спрега при слободно дишење, респирација по синусен закон и респирација по апериодичен закон.

При спонтано слободно дишење, како што се гледа од слика 7.8, иако има извесни промени во формата на функциите на спрега, тие не се многу големи, па може да сметаме дека функциите на спрега, а со тоа и кардиореспираторното заемнодејство е релативно стабилно во текот на времето. Поради тоа и вредностите на индексот на сличност се големи и не флукутираат значително.

Во другите два случаи, при временски променлива респирација, се набљудуваат поголеми промени на индексот на сличност, што е последица на поголемите промени во формата на функциите на спрега. Поголема сличност се добива при помали респираторни фреквенции, односно побавно дишење. Притоа, промените на функциите на спрега ги следат промените на респирацијата и се приближно инверзни на нив, односно имаат максимум таму каде што се минимумите на фреквенцијата на респирацијата и обратно, што е во согласност со претходно објавени резултати дека јачината на кардиореспираторната спрега е поголема при побавно дишење [30, 60]. Ваквото поведење е јасно видливо за случајот на периодичната респирација и помалку видливо кај апериодичната респирација. Кога респираторната фреквенција е висока, амплитудата на спрегата се намалува и формата на функцијата изгледа како синусен бран од втор ред долж двете оски. Ова имплицира дека во таков случај спрегата зависи од двете осцилации. Кај апериодичното дишење, промените во формата на функцијата на спрега се такви што дури и усреднетата функција на спрега покажува брановидни промени со промена на кардио фазата, кои имаат два максимуми и два минимуми при промена на кардио фазата за 2π . Сето ова укажува дека кардиореспираторниот механизам опишан со функцијата на спрега е временски променлив и ја следи индуцираната детерминистичка пертурбација на дишењето.

8. ЗАКЛУЧОК

Главната мотивација за изработка на оваа докторска теза е изнаоѓање на решение на проблемот за одредување на временски прозорец со оптимално времетраење при анализата на динамички временски серии. Во неа е предложен протокол за одредување на временскиот прозорец и параметарот на пренесување во рамките на методот за ДБИ. Протоколот е воведен преку анализи на систем од спрегнати фазни осцилатори, а потоа е тестиран на систем од спрегнати осцилатори на граничен циклус – осцилатори на Поанкаре. Потоа, протоколот е применет при проучување на кардиореспиракторните заемнодејства кај еден субјект за три случаи на респирација – слободно спонтано дишење, контролирано дишење со синусна промена на фреквенцијата и контролирано дишење со апериодични промени на фреквенцијата. При тоа се реконструирани кардиореспиракторните функции на спрега и е потврдена нивната комплексна форма која квалитативно се менува со текот на времето.

Прашањето за одредување на времетраењето на временскиот прозорец, по природата на работите е само по себе несоодветно поставено прашање, особено при експерименталните анализи. Имено, постојат многу различни видови динамички системи со најразлична временска променливост, која се манифестира во различни делови од тие системи, што го прави изнаоѓањето на општо теориско решение многу сложено. Но, во пракса, со акумулирањето на општото знаење на човекот, веќе се истражуваат такви системи и појави, за кои е неопходно да се земе во предвид нивната временска променливост. Од таа причина, предложениот протокол е моделиран да одговара на специфичниот проблем на кардиореспиракторни заемнодејства. Една од основните претпоставки на протоколот е дека системот има осцилаторен карактер, што ја овозможува апроксимацијата за претставување на системот преку неговата фазна динамика. Исто така, се претпоставува дека временските промени се бавни, во споредба со осцилаторните фреквенции во системот. Ваквите претпоставки овозможуваат моделирање на случај каков што се среќава при проучување на кардиореспиракторните интеракции. Дополнително, поради користењето на Фуриеов развој од втор ред за моделирање на базните функции, се појавуваат и ограничувања во инферирањето на високо нелинеарни динамики, а истовремено и на многу бавни промени.

Во анализите на предодредените фазни осцилатори кои заемнодејствуваат, воспоставени се детализирани услови за одредување на временскиот прозорец. Вакви услови не би можеле точно да се одредат за општ случај на непознат систем спрегнати осцилатори на граничен циклус, како што е примерот на разгледуваните осцилатори на Поанкаре, но, користејќи ги фазните осцилатори како граничен модел, анализите покажуваат дека можат да се најдат ограничувања во рамките на кои може да се одреди временскиот прозорец за конкретните случаи. Користењето на инферираната коваријансна

матрица како индикатор за квалитетот на инференцијата може да стане премногу строг и несоодветен критериум во случај на големи варијации кои потекнуваат од шумот. Во таков случај треба да се применат други стохастички методи и во комбинација со предложениот протокол да се одреди влијанието на шумот, за потоа да се утврди дали користењето на коваријансата за одредување на временскиот прозорец е соодветно за конкретниот случај. При проучување на отворени биолошки осцилаторни системи може да се појави и случај на постоење на временска променливост на самата временска променливост и во таков случај предложената методологија може да се примени рекурзивно за различните нивоа на набљудуваната временска променливост.

Примената на протоколот на кардиореспираторните интеракции доведе до нови резултати, некои постојни беа проширени, а дел од резултатите потврдија и некои претходни сознанија. Така на пример, промената на јачината на функцијата на спрега при бавно дишење е позната од претходно, а со примената на протоколот ова сознание се прошири и се покажа дека при синусни промени на респираторната фреквенција ваквите промени се јавуваат континуирано и ја следат пертурбацијата која ги предизвикува. Слично поведение се набљудува и при апериодично дишење, но, веројатно поради нехармоничноста, тоа не е толку изразено. Новодобиен резултат е дека индексот на сличност на функцијата на спрега која го опишува влијанието на дишењето врз срцевата работа е повисок при побавно дишење и во случај на хармониски промени на фреквенцијата, континуирано ја следи пертурбацијата. И кај апериодичната пертурбација се назира слично поведение, но тоа не е толку јасно како во хармонискиот случај. Инферираната форма на кардиореспираторната функција на спрега, за трите испитувани примери на респирација, е конзистентна со резултатите од претходни истражувања. Иако во трите случаи временскиот прозорец има вредности кои значително се разликуваат, добиените формите на усреднетите функции на спрега квалитативно се доста слични.

При побавно дишење, формата на функцијата на спрега се менува главно долж респираторната оска и е релативно константна долж оската на кардио фазата. Тоа укажува дека спрегата е главно одредена од директното влијание на дишењето врз срцевата работа. Ова најјасно се гледа на нискофреквентните делови кај случајот на дишење по синусен закон, а е помалку видливо при апериодична респирација која што се одвива при повисоки респираторни фреквенции. Во физиологијата ваквото влијание на респираторната фреквенција врз срцевата работа е означена како PCA [57] и постојат повеќе истражувања кои ги поврзуваат кардиореспираторните спреги со PCA [24, 27, 58]. Современите физиолошки истражувања укажуваат на тоа дека главна задача на PCA е подобрување на срцевата ефикасност и истовремено одржување на физиолошките нивоа на артеријалниот CO_2 [59]. Резултатите од ова истражување ги потврдуваат ваквите сознанија дека PCA е поизразена при бавно длабоко дишење [57].

При изработката на оваа теза се отворија неколку нови прашања кои овозможуваат нови перспективи за научни истражувања. Иако во неа главниот фокус е на осцилаторните

интеракции кај кардиореспираторниот систем на човекот, предложениот протоколот и резултатите за одредувањето на временскиот прозорец можат да се применат и на други полиња, вклучително осцилаторни интеракции кај други системи кои заемнодејствуваат или кај други методи на анализи на временски серии како и кај други динамички системи кај кои е присутна временска променливост.

Големо подрачје на истражување е примената на методите за испитување на заемнодејствата во човековиот нервен систем кој го истражува невро науката. Од интерес е истражувањето на различните мозочни бранови, при различни физиолошки состојби на организмот и какво е влијанието на физиолошките состојби врз мозочните бранови и обратно. Едно од најголемите прашања и цели би било, дали би можеле преку индуцирање на одредени мозочни бранови, однадвор да влијаеме на постигнување или отстранување на одредени физиолошки состојби. Конкретен пример би бил, преку надворешно влијание на мозочните бранови да спречиме епилептичен напад на пациентот. Проучувањето на механизмите на заемнодејство, опишани преку функциите на спрега меѓу мозочните бранови, има значајна улога во таа насока. Вакви истражувања во моментот се доста актуелни [44, 117, 118] и методот на АДБИ може да си го најде своето место во нив.

И самата примена на кардиореспираторните интеракции може да се прошири со вклучување на повеќе субјекти и различни методи на мерење на срцевата работа и на дишењето. На пример, би можело да се спроведат мерења на пулсот со дополнителен сензор за пулс и да се реконструираат функциите на спрега помеѓу дишењето и пулсот. Исто така, би можело да се испитаат истите протоколи на респирација мерени со помош на различни мерни опреми. Во оваа теза, мерењата на респирацијата се правени преку еластичен појас поставен на градите на субјектот, па во дополнителна студија, би можело да се спроведе и истовремено мерење на воздушниот проток при дишењето и така добиените резултати да се споредат меѓу себе за да се утврди колку формата и јачината на кардиореспираторните функции на спрега зависи од начинот на мерење од кое се реконструира соодветната респираторна фаза.

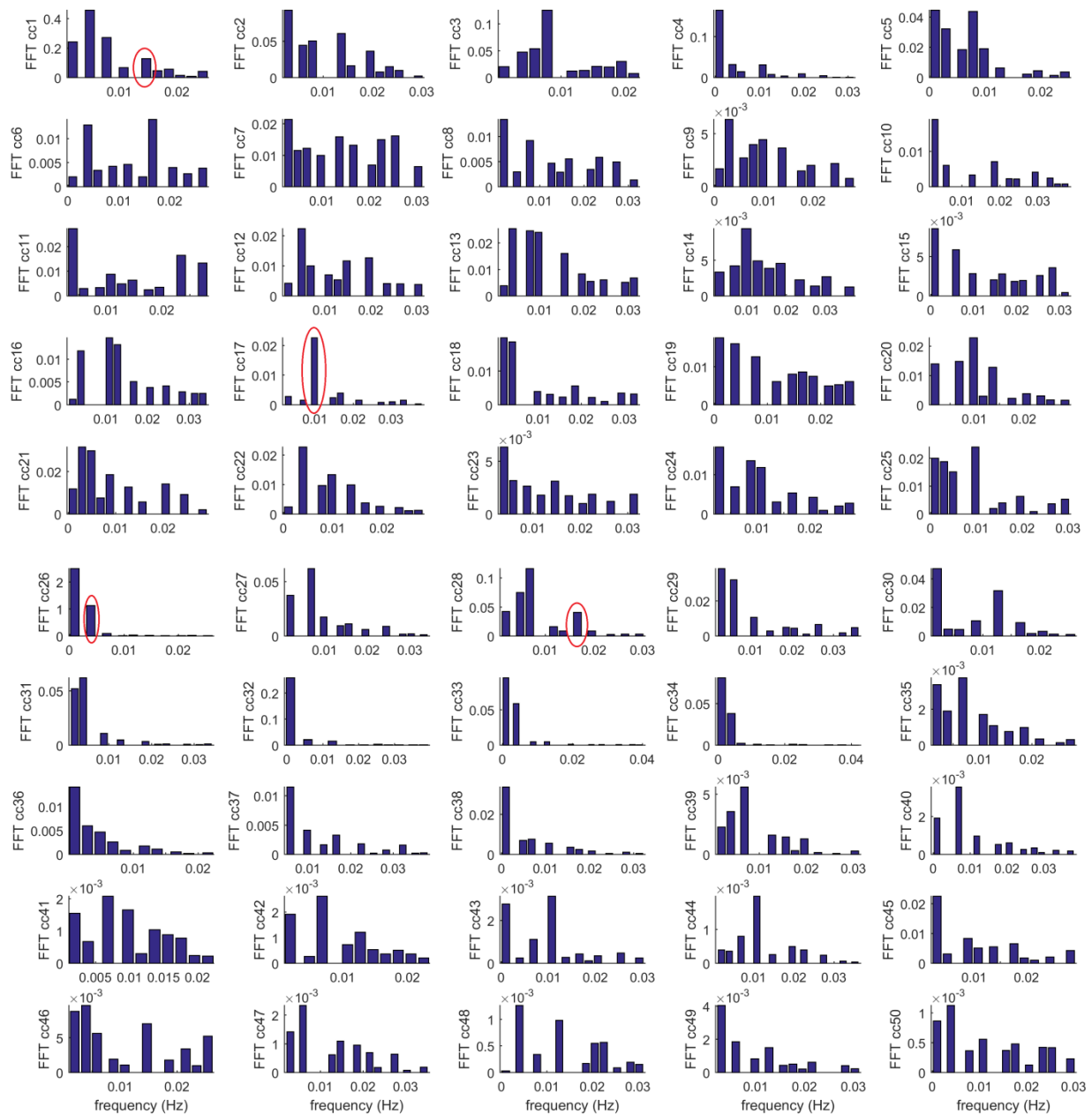
Исто така, протоколот веќе наоѓа примена во физиолошките истражувања, каде што во тек е студија на Институтот за патофизиологија и нуклеарна медицина на Медицинскиот факултет при универзитетот Св. Кирил и Методиј во Скопје во која се испитува ефектот на тироидната дисфункција врз кардиореспираторните интеракции.

ПРИЛОГ 1 – Иницијална инференција за трите респираторни протоколи

Сите педесет инферирани параметри и соодветните резултати од брзата Фурие трансформација за случајот на спонтано дишење се дадени на сликите А.1 и А.2.

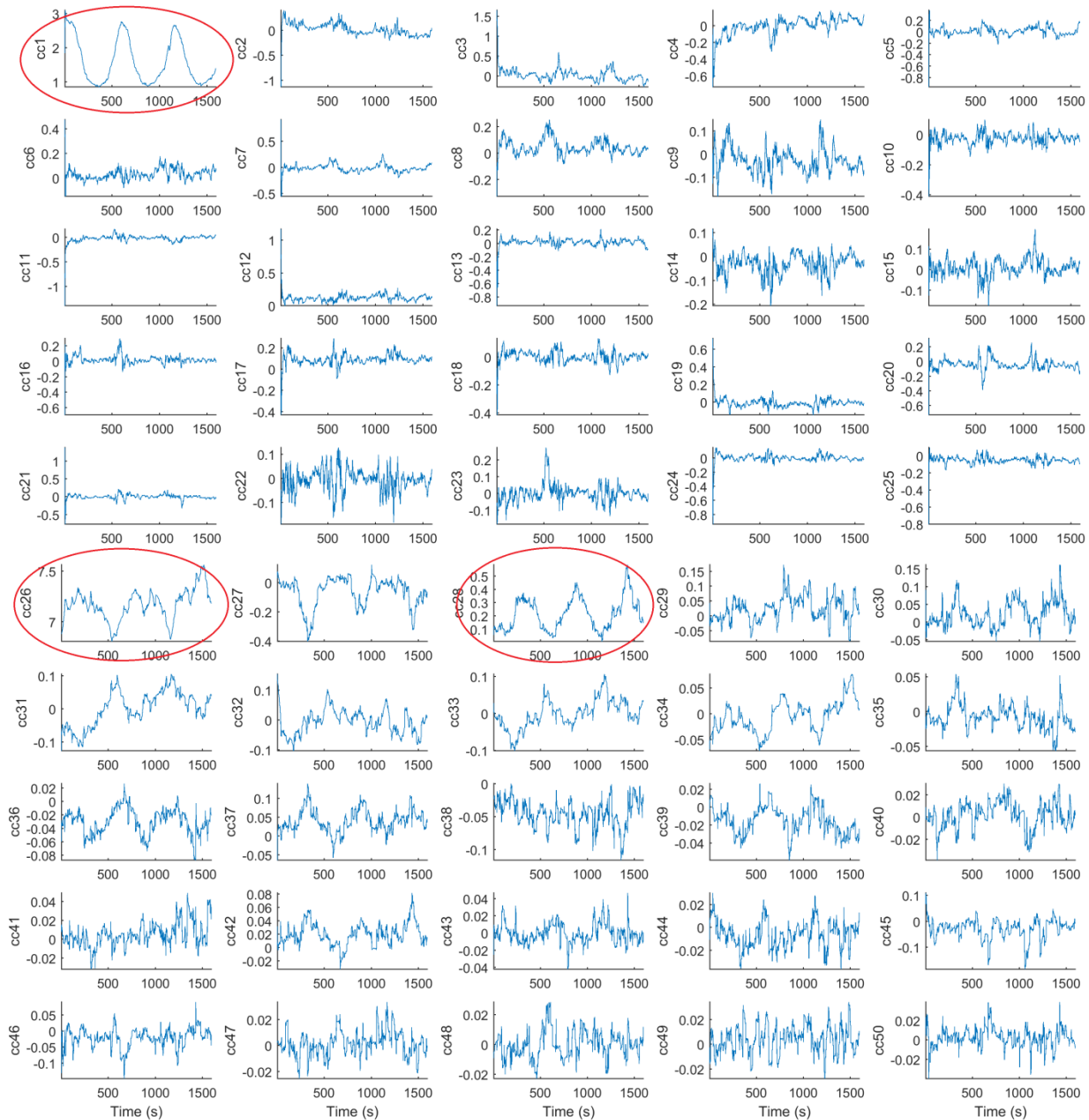


Слика А.1 Инферираните параметри за случајот на спонтано дишење. Најзначајните параметри се означени со црвена боја.

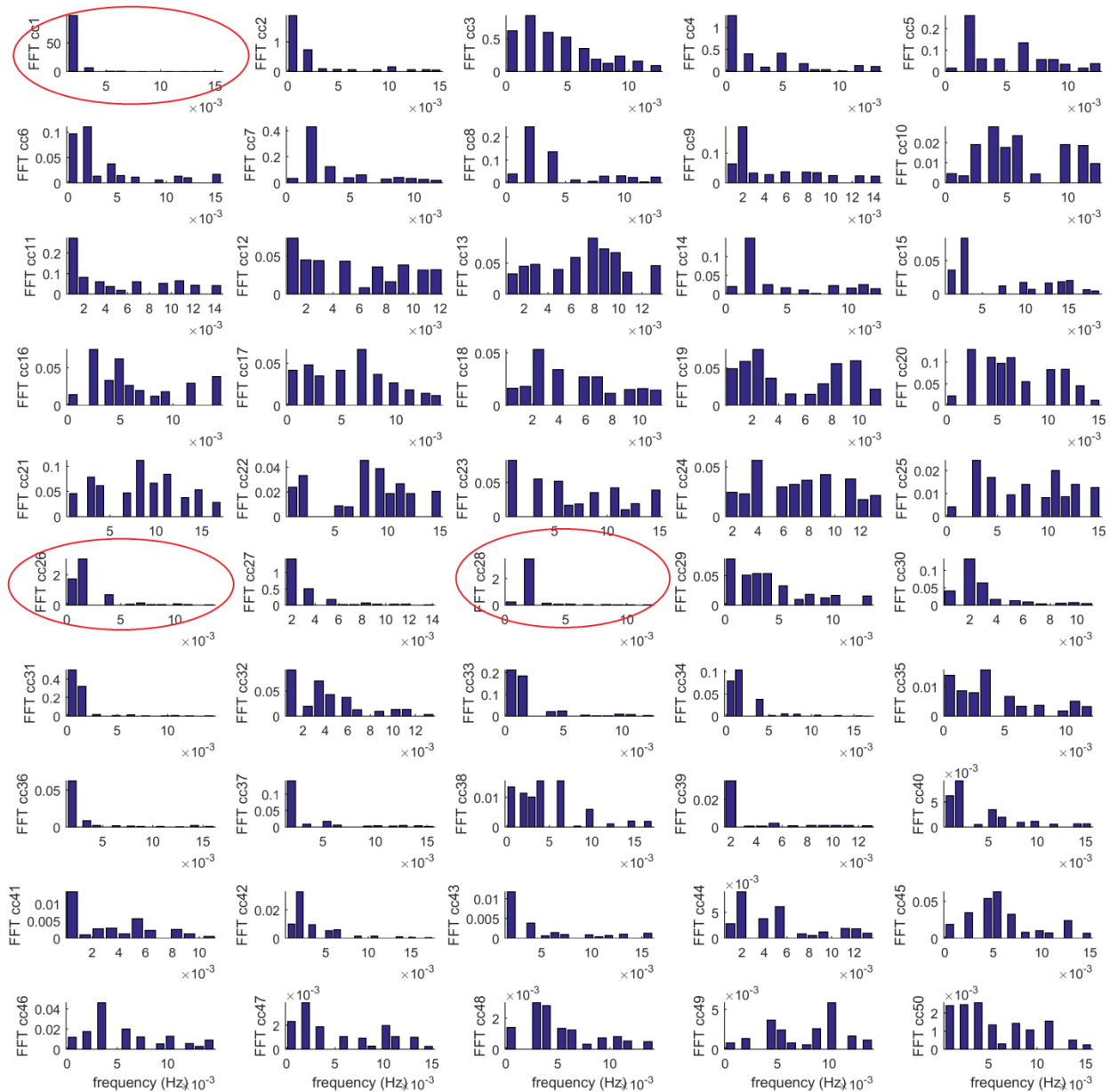


Слика А.2 Брзите Фурие трансформации на инферираните параметри при иницијалната инференција при спонтано дишење. Најзначајните параметри се означени со црвена боја.

Сите педесет инферирани параметри и соодветните резултати од брзата Фурие трансформација за случајот на контролирана респирација по хармониски закон се дадени на сликите А.3 и А.4.



Слика А.3 Инферираните параметри за случајот на контролирана респирација по хармониски закон. Најзначајните параметри се означени со црвена боја.

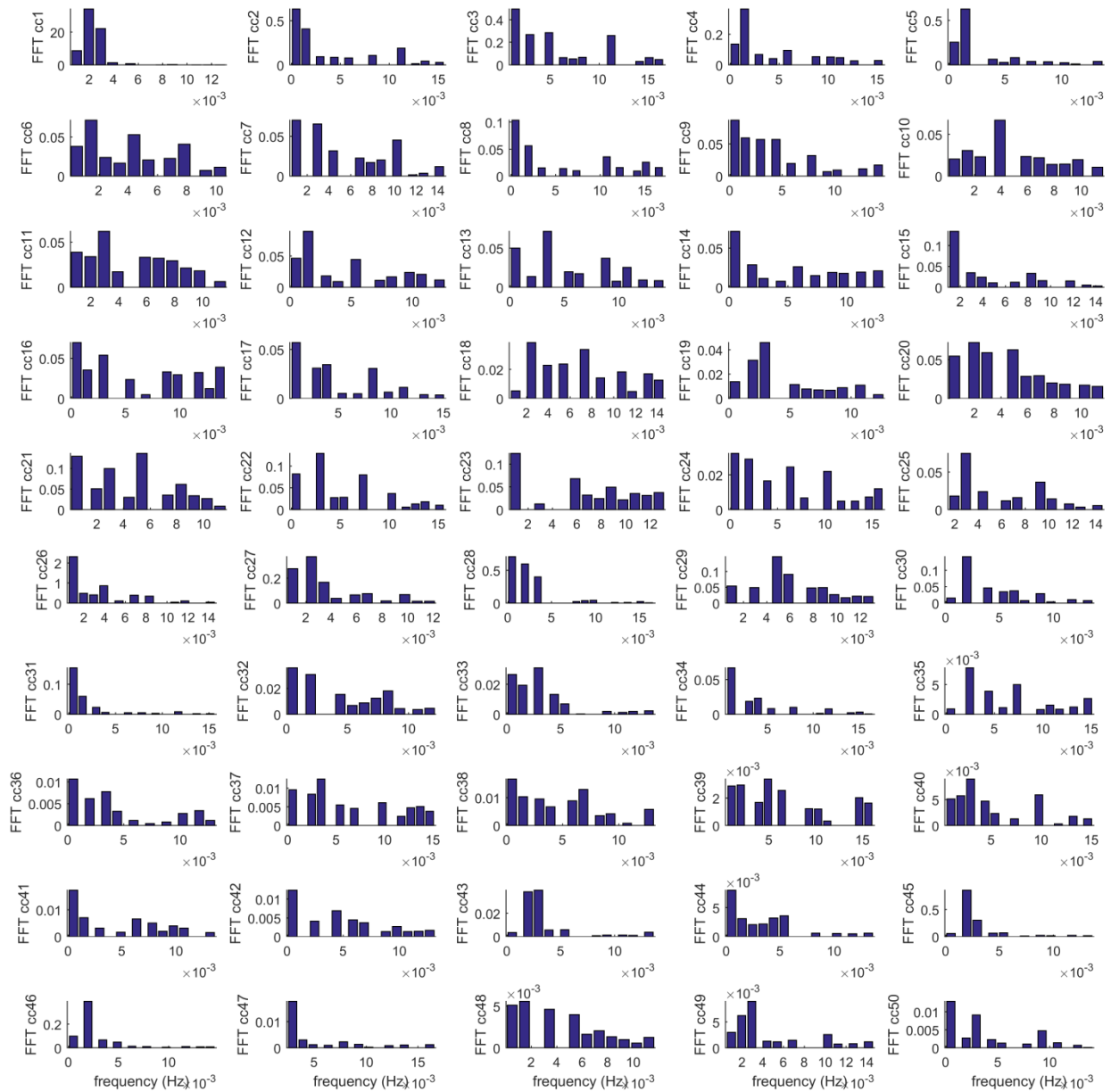


Слика А.4 Брзите Фурие трансформации на инферираните параметри при иницијалната инференција при контролирана респирација по хармониски закон. Најзначајните параметри се означени со црвена боја.

Сите педесет инферирани параметри и соодветните резултати од брзата Фурие трансформација за случајот на контролирана респирација по ахармониски закон се дадени на сликите А.5 и А.6.



Слика А.5 Инферираните параметри за случајот на контролирана респирација по ахармониски закон. Најзначајните параметри се означени со црвена боја.



Слика А.6 Брзите Фурие трансформации на инферираните параметри при иницијалната инференција при контролирана респирација по ахармониски закон.

ПРИЛОГ 2 – Список на објавени трудови

- [1] Lukarski, D., Ginovska, M., Spasevska, H., Stankovski, T. (2020). Time window determination for inference of time-varying dynamics: application to cardiorespiratory interaction. *Front. Physiol.* 11:341, (IF=3.201).
- [2] Lukarski, D., Ginovska, M., Spasevska, H., Stankovski, T. Time-variability of cardiorespiratory interactions. 11th Conference of the European Study Group on Cardiovascular Oscillations (ESGCO), Pisa, Italy, 2020, pp. 1-2, doi: 10.1109/ESGCO49734.2020.9158192.
- [3] Lukarski, D., Spasevska, H., Stankovski, T. (2020). Towards a Protocol for Adaptive Dynamical Bayesian Inference: Case of Limit-Cycle Oscillators, *JEEIT*, Vol.5, No.2, 85-92.
- [4] Lukarski, D., Stavrov, D., Stankovski, T., Variability of Cardiorespiratory Interactions Under Different Breathing Patterns, *Biomedical Signal Processing and Control* (in preparation 2021).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Winfree, A. T. (1980). *The Geometry of Biological Time*. New York, NY: Springer-Verlag.
- [2] Haken, H. (1983). *Synergetics, An Introduction*. Berlin: Springer.
- [3] Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag.
- [4] Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2001). *Synchronization - A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] Strogatz, S. (2001). *Nonlinear Dynamics And Chaos*. Boulder, CO: Westview Press.
- [6] Kloeden, P. E., Rasmussen, M. (2011). *Nonautonomous Dynamical Systems*. New York, NY: AMS Mathematical Surveys and Monographs.
- [7] Stankovski, T. (2013). *Tackling the Inverse Problem for Non-Autonomous Systems: Application to the Life Sciences*. Berlin: Springer.
- [8] Suprunenko, Y. F., Clemson, P. T., Stefanovska, A. (2013). Chronotaxic systems: a new class of self-sustained nonautonomous oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 111:024101.
- [9] Alberghina, L., Westerhoff, H. V. (Eds) (2005). *Systems Biology: Definitions and Perspectives*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] Murray, J. D. (2007). *Mathematical Biology I. An Introduction*, 3rd Edition, Springer.
- [11] Keener, J., Sneyd, J. (2009). *Mathematical Physiology: I. Cellular Physiology*, Springer-Verlag New York.
- [12] Marieb, E.N. (2007). *Human Anatomy and Physiology*, 7th edn. Benjamin Cummings, San Francisco.
- [13] Charlie, B. (2003). *Nervous System*, Mosby, Edinburgh.
- [14] Peskin, C. S. (1981). *Lectures on Mathematical Aspects of Physiology*, Vol. 19 of *Lect. Q12 Appl. Math.* American Mathematical Society, 1–107, Providence, Rhodes Island.
- [15] Levy, M., Stanton, B., Koeppen, B. (2006). *Berne & Levy Principles of Physiology*. St. Louis, MO: Elsevier Mosby.
- [16] Bashan, A., Bartsch, R. P., Kantelhardt, J. W., Havlin, S., Ivanov, P. C. (2012). Network physiology reveals relations between network topology and physiological function. *Nat. Commun.* 3:702.

- [17] Lehnertz, K., Ansmann, G., Bialonski, S., Dickten, H., Geier, C., Porz, S. (2014). Evolving networks in the human epileptic brain. *Phys. D* 267, 7–15.
- [18] Landa, Polina Solomonovna. (1996). *Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems*. Vol. 360. Springer Science & Business Media.
- [19] Glass, L. (2001). Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature* 410, 277–284.
- [20] Kralemann, B., Pikovsky, A., Rosenblum, M. (2013b). Detecting triplet locking by triplet synchronization indices. *Phys. Rev. E* 87:052904.
- [21] Schäfer, C., Rosenblum, M. G., Kurths, J., Abel, H. H. (1998). Heartbeat synchronised with ventilation. *Nature* 392, 239–240.
- [22] Schulz, S., Haueisen, J., Bär, K.-J., Voss, A. (2018). Multivariate assessment of the central-cardiorespiratory network structure in neuropathological disease. *Physiol. Meas.* 39:074004.
- [23] Stefanovska, A., Haken, H., McClintock, P. V. E., Hožič, M., Bajrović, F., Ribarič, S. (2000). Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system. *Phys. Rev. Lett.* 85, 4831–4834.
- [24] Iatsenko, D., Bernjak, A., Stankovski, T., Shioagai, Y., Owen-Lynch, P. J., Clarkson, P. B. M., et al. (2013). Evolution of cardio-respiratory interactions with age. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 371:20110622.
- [25] Grote, V., Levnajic, Z., Puff, H., Ohland, T., Goswami, N., Frühwirth, M., et al. (2019). Dynamics of vagal activity due to surgery and subsequent rehabilitation. *Front. Neurosci.* 13:1116.
- [26] Rosenblum, M., Frühwirth, M., Moser, M., and Pikovsky, A. (2019). Dynamical disentanglement in an analysis of oscillatory systems: an application to respiratory sinus arrhythmia. *Philos. Trans. R. Soc. A* 377:20190045.
- [27] Kralemann, B., Frühwirth, M., Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kenner, T., Schaefer, J., et al. (2013a). In vivo cardiac phase response curve elucidates human respiratory heart rate variability. *Nat. Commun.* 4:2418.
- [28] Stefanovska, A., Bračič, M., Kvernmo, H. D. (1999). Wavelet analysis of oscillations in the peripheral blood circulation measured by laser Doppler technique. *IEEE Trans. Bio. Med. Eng.*, 46(10):1230–1239.
- [29] Shioagai, Y., Stefanovska, A., McClintock, P.V.E. (2010). Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing. *Physics Reports*, 488:51 – 110.
- [30] Stankovski, T., Duggento, A., McClintock, P. V. E., and Stefanovska, A. (2012). Inference of time-evolving coupled dynamical systems in the presence of noise. *Phys. Rev. Lett.* 109:024101.

- [31] Stankovski, T., Duggento, A., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2014a). A tutorial on time-evolving dynamical Bayesian inference. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 223, 2685–2703.
- [32] Ticcinielli, V., Stankovski, T., Iatsenko, D., Bernjak, A., Bradbury, A., Gallagher, A., et al. (2017). Coherence and coupling functions reveal microvascular impairment in treated hypertension. *Front. Physiol.* 8:749.
- [33] Rosenblum, M. G., Cimponeriu, L., Bezerianos, A., Patzak, A., and Mrowka, R. (2002). Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction. *Phys. Rev. E.* 65:041909.
- [34] Paluš, M., and Stefanovska, A. (2003). Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach. *Phys. Rev. E* 67:055201.
- [35] Voss, A., Schulz, S., Schroeder, R., Baumert, M., and Caminal, P. (2008). Methods derived from nonlinear dynamics for analysing heart rate variability. *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 367, 277–296.
- [36] Hagos, Z., Stankovski, T., Newman, J., Pereira, T., McClintock, P. V., and Stefanovska, A. (2019). Synchronization transitions caused by timevarying coupling functions. *Philos. Trans. R. Soc. A* 377:20190275.
- [37] Stankovski, T. (2017). Time-varying coupling functions: dynamical inference and cause of synchronization transitions. *Phys. Rev. E* 95:022206.
- [38] Kiss, I. Z., Rusin, C. G., Kori, H., Hudson, J. L. (2007). Engineering complex dynamical structures: sequential patterns and desynchronization. *Science* 316, 1886–1889.
- [39] Ranganathan, S., Spaiser, V., Mann, R. P., Sumpter, D. J. T. (2014). Bayesian dynamical systems modelling in the social sciences. *PLoS ONE* 9:e86468.
- [40] Stankovski, T., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2014b). Coupling functions enable secure communications. *Phys. Rev. X* 4:011026.
- [41] Ashwin, P., Bick, C., Poignard, C. (2019). State-dependent effective interactions in oscillator networks through coupling functions with dead zones. *Philos. Trans. R. Soc. A.* 377:20190042.
- [42] Moon, W., Wettlaufer, J. S. (2019). Coupling functions in climate. *Philos. Trans. R. Soc. A* 377:20190006.
- [43] Stankovski, T., Pereira, T., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2017). Coupling functions: universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev. Mod. Phys.* 89:045001.
- [44] Stankovski, T., Petkoski, S., Raeder, J., Smith, A. F., McClintock, P. V. E., and Stefanovska, A. (2016). Alterations in the coupling functions between cortical and

- cardio-respiratory oscillations due to anaesthesia with propofol and sevoflurane. *Phil. Trans. R. Soc. A* 374:20150186.
- [45] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A.S. (2001) Detecting direction of coupling in interacting oscillators, *Phys. Rev. E* 64, 045202(R)
 - [46] Duggento, A., Stankovski, T., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2012). Dynamical Bayesian inference of time-evolving interactions: from a pair of coupled oscillators to networks of oscillators. *Phys. Rev. E* 86:061126.
 - [47] Tokuda, I. T., Jain, S., Kiss, I. Z., Hudson J.L. (2007). Inferring Phase Equations from Multivariate Time Series, *Phys. Rev. Lett.* 99, 064101.
 - [48] Schwabedal, J. T. C., Pikovsky, A. (2010). Effective phase dynamics of noise-induced oscillations in excitable systems, *Phys. Rev. E* 81, 046218.
 - [49] Galán, R.F., Ermentrout, G.B., Urban, N. N. (2005). Efficient Estimation of Phase-Resetting Curves in Real Neurons and its Significance for Neural-Network Modeling, *Phys. Rev. Lett.* 94, 158101.
 - [50] Timme, M. (2007). Revealing Network Connectivity from Response Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 98, 224101.
 - [51] Levnajić, Z., Pikovsky, A. (2011). Network Reconstruction from Random Phase Resetting, *Phys. Rev. Lett.* 107, 034101.
 - [52] Smelyanskiy, V. N., Luchinsky, D. G., Stefanovska, A., McClintock, P. V. E. (2005). Inference of a nonlinear stochastic model of the cardiorespiratory interaction, *Phys. Rev. Lett.* 94, 098101.
 - [53] Luchinsky, D. G., Smelyanskiy, V. N., Duggento, A., McClintock, P. V. E. (2008). Inferential framework for nonstationary dynamics. I. Theory, *Phys. Rev. E* 77, 061105.
 - [54] Nakao, H., Yanagita, T., Kawamura, Y. (2014). Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-diffusion systems. *Phys. Rev. X* 4:021032.
 - [55] Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: SIAM.
 - [56] Kaiser, G. (1994). *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Boston.
 - [57] Hirsch, J. A., and Bishop, B. (1981). Respiratory sinus arrhythmia in humans - how breathing pattern modulates heart rate. *Am. J. Physiol.* 241, H620–H629.
 - [58] Schulz, S., Adochiei, F.-C., Edu, I.-R., Schroeder, R., Costin, H., Bär, K.- J., et al. (2013). Cardiovascular and cardiorespiratory coupling analyses: a review. *Philos. Trans. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* 371:20120191.

- [59] Elstad, M., O'Callaghan, E. L., Smith, A. J., Ben-Tal, A., Ramchandra, R. (2018). Cardiorespiratory interactions in humans and animals: rhythms for life. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 315, H6–H17.
- [60] Stankovski, T., Cooke, W. H., Rudas, L., Stefanovska, A., Eckberg, D. L. (2013). Time-frequency methods and voluntary ramped frequency breathing: a powerful combination for exploration of human neurophysiological mechanisms. *J. Appl. Physiol.* 115, 1806–1821.
- [61] Huygens, C., (Hugenii). *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Parisiis, France, 1673. English translation: *The Pendulum Clock*, Iowa State University Press, Ames, 1986.
- [62] Pikovsky, A., Politi, A. (2016). *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press.
- [63] Stefanovska, A., Lotric M. B., Strle, S., Haken, H. (2001). The cardiovascular system as coupled oscillators? *Physiol Meas*, 22(3):535-50.
- [64] Panovko Ya. G., Gubanova, I. I. (1964). *Stability and Oscillation of Elastic Systems*, Nauka, Moscow, (in Russian).
- [65] Rasmussen, M. (2007). *Attractivity and Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [66] Anishchenko, V., Vadivasova, T., Strelkova, G. (2010). Stochastic self-sustained oscillations of non-autonomous systems. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 187:109–125.
- [67] Stankovski, T., Pereira, T., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2019). Coupling functions: dynamical interaction mechanisms in the physical, biological and social sciences. *Phil. Trans. R. Soc. A* 377: 20190039.
- [68] Bahraminasab, A., Ghasemi, F., Stefanovska, A., McClintock, P. V. E., Kantz, H. (2008). Direction of coupling from phases of interacting oscillators: A permutation information approach. *Physical Review Letters*, 100:084101.
- [69] Staniek, M., Lehnertz, K. (2008). Symbolic Transfer Entropy. *Phys. Rev. Lett.* 100, 158101.
- [70] Jamšek, J., Paluš, M., Stefanovska, A. (2010). Detecting couplings between interacting oscillators with time-varying basic frequencies: Instantaneous wavelet bispectrum and information theoretic approach. *Phys. Rev. E*, 81:036207.
- [71] Sun, J., Taylor, D., Bollt, E. M. (2015). 1. Causal Network Inference by Optimal Causation Entropy. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(1), 73-106.
- [72] Faes, L., Nollo, G., Porta, A. (2011). Information-based detection of nonlinear Granger causality in multivariate processes via a nonuniform embedding technique, *Phys. Rev. E* 83, 051112.

- [73] Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16:15.
- [74] Nakao, H. (2015). Phase reduction approach to synchronisation of nonlinear oscillators. *J. Contemp. Phys.* 57, 188.
- [75] Takens, F. (1981). Detecting Strange Attractors in Turbulence. In: D.A. Rand and L.S. Young, Eds., *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 898, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 366-381.
- [76] Clemson, P. T., Stefanovska, A. (2014). Discerning non-autonomous dynamics. *Phys. Rep.* Vol.542, Iss.4, 297.
- [77] Friston, K.J. (2002). Bayesian Estimation of Dynamical Systems: An Application to fMRI. *NeuroImage* 16(2), 513.
- [78] Voss, H. U., Timmer, J., Kurths, J. (2004). Nonlinear Dynamical System Identification from Uncertain and Indirect Measurements. *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol.14, No.06, 1905.
- [79] Kralemann, B., Pikovsky, A., Rosenblum, M. (2011). Reconstructing phase dynamics of oscillator networks. *Chaos* 21, 025104.
- [80] Stankovski, T., Ticcinelli, V., McClintock, P. V. E., Stefanovska, A. (2015). Coupling functions in networks of oscillators. *New J. Phys.* 17, 035002.
- [81] Aronson, D. G., Ermentrout, G. B., Kopell, N. (1990). Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D*, 41, 403.
- [82] Cross, M. C., Rogers, J. L., Lifshitz, R., Zumdieck, A. (2006). Synchronization by reactive coupling and nonlinear frequency pulling. *Phys. Rev. E* 73, 036205.
- [83] Karnatak, R., Ramaswamy, R., Prasad, A. (2007). Amplitude death in the absence of time delays in identical coupled oscillators. *Phys. Rev. E* 76, 035201.
- [84] Cosenza, M. G., Parravano, A. (2001). Dynamics of coupling functions in globally coupled maps: Size, periodicity, and stability of clusters. *Phys. Rev. E* 64, 036224.
- [85] Resmi, V., Ambika, G., Amritkar, R. E. (2011). General mechanism for amplitude death in coupled systems. *Phys. Rev. E* 84, 046212.
- [86] Miyazaki, J., Kinoshita, S. (2006). Determination of a Coupling Function in Multicoupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 96, 194101.
- [87] Kralemann, B., Cimponeriu, L., Rosenblum, M., Pikovsky, A., Mrowka, R. (2008). Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data. *Phys. Rev. E* 77:066205.

- [88] Tokuda, I. T., Wickramasinghe, M., Kiss, I. Z. (2013). Detecting connectivity of small, dense oscillator networks from dynamical measurements based on a phase modeling approach. *Phys. Lett. A* 377, 1862.
- [89] Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *J. Math. Psych.* 47, 90
- [90] Kapitaniak, M., Czołczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A., Kapitaniak, T. (2012). Synchronization of clocks. *Phys. Rep.* 517, 1.
- [91] Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans.* 53, 370. <https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053>.
- [92] Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., Clapp, T. (2002). A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. *Signal Processing. IEEETrans.* 50(2), 174.
- [93] Von Toussaint, U. (2011). Bayesian inference in physics. *Rev. Mod. Phys.* 83(3), 943.
- [94] Smelyanskiy, V. N., Luchinsky, D. G., Timuchin, D.A., Bandrivskyy, A. (2005). Reconstruction of stochastic nonlinear dynamical models from trajectory measurements. *Phys. Rev. E* 72(2), 026202.
- [95] Penny, W.D. , Litvak, V., Fuentemilla, L., Duzel, E., Friston, K. (2009). Dynamic Causal Models for phase coupling. *J. Neurosci. Meth.* 183(1), 19.
- [96] Haken, H. (1975). Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. *Rev. Mod. Phys.* 47, 67.
- [97] Kiss, I. Z. , Zhai, Y., Hudson, J. L. (2005). Predicting mutual entrainment of oscillators with experiment-based phase models. *Phys. Rev. Lett.*, 94:248301.
- [98] Musizza, B., Stefanovska, A., McClintock, P.V.E., Paluš, M., Petrovčič, J., Ribarič, S., Bajrović, F. (2007). Interactions between cardiac, respiratory and eeg- oscillations in rats during anaesthesia. *The Journal of Physiology*, 580(1):315–326.
- [99] Hempel, S., Koseska, A., Kurths, J., Nikoloski, Z. (2011). Inner composition alignment for inferring directed networks from short time series. *Phys. Rev. Lett.*, 107:054101.
- [100] Schreiber, T., Schmitz, A. (1996). Improved surrogate data for nonlinearity tests. *Phys. Rev. Lett.*, 77(4):635–638.
- [101] Paluš, M. (2008). Bootstrapping multifractals: Surrogate data from random cascades on wavelet dyadic trees. *Phys. Rev. Lett.*, 101(13):134101.
- [102] Daido, H. (1996). Multibranch entrainment and scaling in large populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1406–1409.

- [103] Crawford, J. D. (1995). Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 74:4341–4344.
- [104] Hellman, J. B., Stacy, R. W. (1976). Variation of respiratory sinus arrhythmia with age. *J. App. Phys.*, 41.
- [105] De Meersman, R. E. (1992). Respiratory sinus arrhythmia alteration following training in endurance athletes. *Eur. J. Appl. Physiol.* 64:434-436.
- [106] Galletly, D., C., Larsen, P., D. (2001). Inspiratory timing during anaesthesia: a model of cardioventilatory coupling. *Br J Anaesth* 86: 777–788.
- [107] Tzeng, Y., C., Larsen P., D., Galletly, D., C. (2003). Cardioventilatory coupling in resting human subjects. *Exp Physiol* 88: 775–782.
- [108] Holst, K., Ugander, M., Sigfridsson, A. (2018). Respiratory variation in left ventricular cardiac function with 3D double golden-angle whole-heart cine imaging. *Magn Reson Med* 79: 2693-2701.
- [109] Guz, A., Innes, J., A., Murphy, K. (1987). Respiratory modulation of left ventricular stroke volume in man measured using pulsed Doppler ultrasound. *J Physiol* 393: 499–512, 1987.
- [110] Toska, K., Eriksen, M. (1993). Respiration-synchronous fluctuations in stroke volume, heart rate and arterial pressure in humans. *J Physiol* 472: 501–512.
- [111] Eckberg, D., L. (2003). The human respiratory gate. *J Physiol.* 2003 Apr 15; 548(Pt 2): 339–352.
- [112] Zygmund, A. (1968). *Trigonometric Series* (2nd ed.), Cambridge University Press (published 1988), ISBN 978-0-521-35885-9.
- [113] Gabor, D. (1946). Theory of communication. *J. IEEE*, 93:429–457.
- [114] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., Kurths, J. (2004). Synchronization approach to analysis of biological systems. *Fluctuation and Noise Letters*, 4(1):53.
- [115] Ursino, M. (1998). Interaction between carotid baroregulation and the pulsating heart: a mathematical model. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 275, H1733-1747.
- [116] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.* 20 (2): 130–141.
- [117] Wilting, J., Lehnertz, K. (2015). Bayesian inference of interaction properties of noisy dynamical systems with time-varying coupling: capabilities and limitations, *Eur. Phys. J. B* 88, 193.
- [118] Jirsa, V., Müller, V. (2013). *Frontiers Comput. Neurosci.* 7, 78.